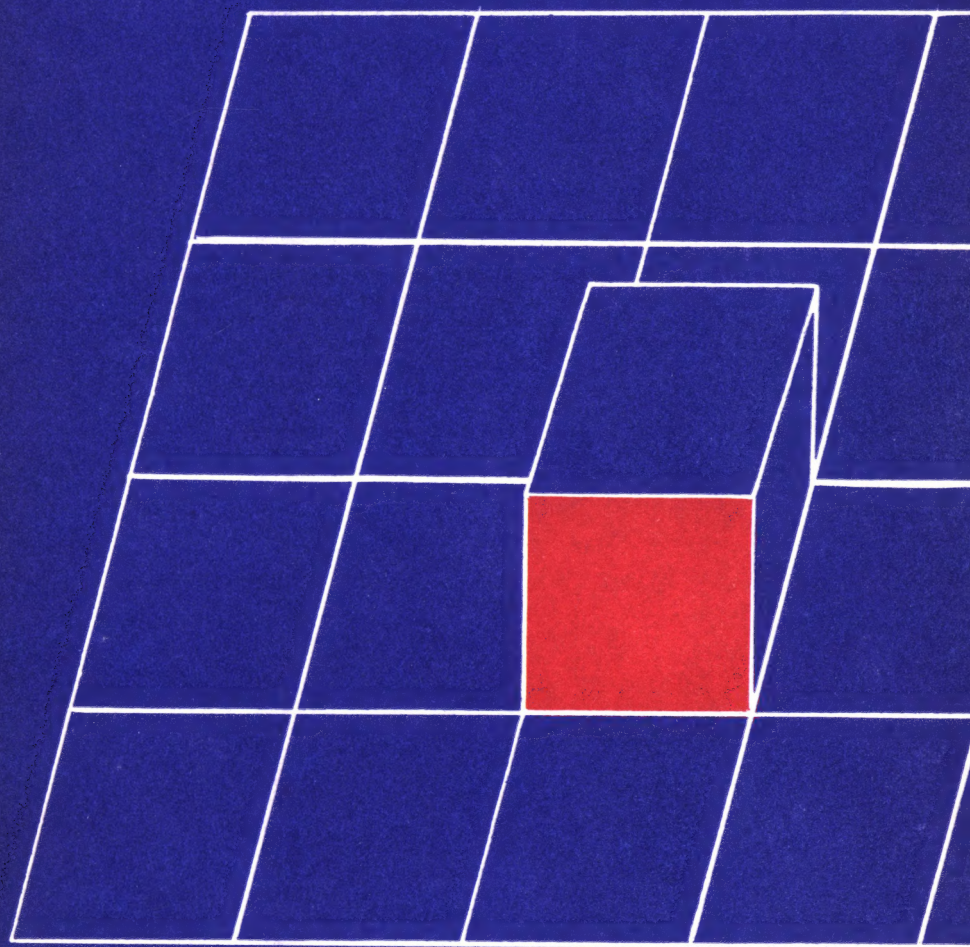


М. Кройц

Кварки, глюоны и решетки



Издательство «Мир»

Кварки, глюоны и решетки

M. Creutz

*Quarks,
gluons
and lattices*

Cambridge University Press

Cambridge

London New York New Rochelle

Melbourne Sydney

1983

М. Кройц

*Кварки,
глюоны
и решетки*

Перевод с английского
кандидатов физ.-мат. наук
В. П. Гердта и В. К. Митрюшкина
под редакцией
чл.-корр. АН СССР
Д. В. Ширкова



Москва «Мир» 1987

ББК 22.31
К83
УДК 539.12

Кройц М.

К83 Кварки, глюоны и решетки: Пер. с англ. — М.: Мир, 1987 —
192 с., илл.

Книга известного американского физика-теоретика М. Кройца представляет собой первую в мировой литературе монографию, в которой систематически излагается новое перспективное направление в физике элементарных частиц и квантовой теории поля — решеточная формулировка калибровочных теорий. Представлены практически все основные идеи этого нового направления. Материал излагается в систематической и доступной форме.

Для специалистов в области физики высоких энергий, а также студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

К $\frac{1704070000 - 101}{041(01) - 87}$ 78—87, ч. 1

ББК 22.31

Редакция литературы по физике и астрономии

© Cambridge University Press 1983

This book was originally published in the English language by Cambridge University Press of Cambridge, England

© перевод на русский язык, «Мир», 1987

Предисловие редактора перевода

Облик квантовой теории поля, история которой насчитывает уже более полувека, существенно изменился за последние 10—15 лет. Помимо появления реалистических перенормируемых теорий слабого и сильного взаимодействия, основанных на принципе локальной калибровочной симметрии, в этой трансформации существенную роль сыграли вновь развитые методы численных расчетов с помощью представления функционального интеграла, рассматриваемого в решеточном приближении.

Такие методы были разработаны для нужд современной теории сильных взаимодействий — квантовой хромодинамики. В этой теории традиционные квантовополевые методы вычислений, основанные на перенормируемой теории возмущений, символом и непременным атрибутом которой является диаграмма Фейнмана, оказались адекватными лишь для процессов, существенная часть которых разыгрывается на достаточно малых расстояниях ($\leq 10^{-15}$ см), или, что равносильно, характеризующихся большими значениями переданных импульсов.

Эти методы основаны на приближенном представлении функциональных интегралов с помощью обычных интегралов очень высокой кратности, возникающем в результате введения решетки в 4-мерном пространстве-времени, и последующем приближенном вычислении полученного кратного интеграла методом Монте-Карло. Физически содержательные вычисления процессов и характеристик адронной физики с помощью «метода Монте-Карло на решетке» в области сильной связи квантовой хромодинамики оказались возможными в самые последние годы, когда появились достаточно мощные ЭВМ. Дело в том, что физически интересные результаты получаются при использовании решеток с 10^4 — 10^5 элементами (см. начало гл. 18 и 19). Это определяет требования к оперативной памяти ЭВМ, которая, таким образом, должна иметь объем не менее 100 килобайт. Подобной памятью обладает, например, ЭВМ ЕС-1040. Получение точности порядка 10% в статистическом методе, каким является метод Монте-Карло, требует примерно 100 итераций. При быстройдействии 300 000 операций в секунду, характерном для ЕС-1040, проведение одного расчета, т. е. получение всего лишь одной точки на кривой, подобной приведенным в

гл. 18—20, требует около часа машинного времени. Поскольку для получения физического параметра необходимо построить кривую по нескольким десяткам точек (см., например, рис. 19.2), проведение одного физического расчета может потребовать на такой ЭВМ до сотни часов машинного времени. Наиболее важные и надежные физические результаты, подобные описанным в последних главах книги, получены на самых современных ЭВМ с быстродействием порядка 100 млн операций в секунду — так называемых супер-ЭВМ, или машинах четвертого поколения. Поскольку использование ЭВМ общего назначения оказывается весьма дорогостоящим, а также нерациональным, в последние годы начали конструировать специализированные, так называемые матричные, процессоры, наиболее подходящие для вычислений методом Монте-Карло на решетке (см. недавнюю статью К. Вильсона [189]).

Предлагаемая советскому читателю книга практически может служить учебником по новому подходу к квантовой теории поля, не связанному с теорией возмущений. Для ее чтения требуется подготовка в объеме стандартного курса квантовой теории поля, включающего теорию калибровочных полей и метод функционального интеграла. Наиболее удобен для этой цели учебник П. Рамона [190], изложение в котором построено на основе понятия функционального интеграла. В качестве литературы, дополняющей более традиционное построение основ квантовой теории поля, можно рекомендовать книги Славнова, Фаддеева и Хуанга [191, 192].

Автор книги профессор Майкл Кройц является одним из ведущих специалистов в данной области. Значительная часть наиболее важных для физики адронов результатов, полученных методом Монте-Карло на решетке, принадлежит ему или опубликовано в работах, где он является соавтором.

В изложении с самого начала используется формальная аналогия между 4-мерной евклидовой квантовой теорией поля и статистической механикой. При этом можно вести обсуждение на двух разных физических языках, что позволяет привлекать качественные соображения из теории критических явлений и обогащает физические мотивировки в сложных местах рассуждений. Такой способ существенно облегчает восприятие материала. В то же время он демонстрирует мощь и общность методов современной математической физики, создавая своеобразную атмосферу единства физического знания, что несомненно доставит удовольствие соответствующим образом настроенному читателю.

За период, прошедший после написания книги автором, данный раздел теории получил дальнейшее развитие. Путем более интен-

сивного использования ренормгрупповых соображений в вычислениях на решетке был сформулирован так называемый «метод Монте-Карло-ренормгруппы», позволяющий улучшить сходимость численных расчетов, что в конечном итоге приводит к экономии машинного времени.

Использование супер-ЭВМ в комбинации с Монте-Карло-ренормгруппой сделало доступными расчеты нового класса физических характеристик, таких как коэффициент линейного роста на больших расстояниях для междукваркового потенциала (явление удержания, или конфайнмента), масс и магнитных моментов адронов и адронных резонансов, а также проведение вычислений в приближении, учитывающем фермионные, т. е. кварковые, степени свободы в промежуточных состояниях.

В целом можно констатировать, что полученные результаты привели к теоретическому обоснованию конфайнмента, а также к разумному согласию с массами и магнитными моментами. Этот успех позволил сделать важный общий вывод о физическом статусе квантовой хромодинамики. В настоящее время считается общепризнанным, что эта квантовополевая теория взаимодействия кварков и глюонов является адекватной теоретической моделью для описания мира адронов и их взаимодействий как в области высоких энергий и больших передач импульса, так и в области низких энергий.

Предисловие и гл. 1—11 перевел В.П. Гердт, гл. 12—20 перевел В.К. Митрюшкин.

Д.В. Ширков

Предисловие

В течение последних нескольких лет наблюдается резкое возрастание количества исследований в промежуточной области между физикой твердого тела и физикой элементарных частиц. В его основе лежит использование решеточной регуляризации для изучения непертурбативных явлений в калибровочных теориях сильных взаимодействий. Однако в стандартных учебниках изложение теории поля ведется с использованием традиционных методов теории возмущений. Целью данной книги является попытка ознакомить с решеточной техникой специалистов в области физики элементарных частиц, обладающих основными сведениями по релятивистской квантовой механике.

Книга не претендует на обзор последних достижений, которые быстро развиваются; она содержит описание некоторых наиболее устоявшихся методов. Изложение материала ведется в рамках физики элементарных частиц. Специалисты в области физики твердого тела могут заинтересоваться тем, почему теоретики, занимающиеся физикой высоких энергий, заимствуют многие идеи физики твердого тела. Но им не следует ожидать в данной книге изложения вопросов, представляющих интерес главным образом в их собственной области исследований. Так, например, такие важные вопросы физики твердого тела, как двумерные спиновые модели, критические показатели и феноменология неподвижной точки, упоминаются лишь вскользь.

Я благодарен Международной школе исследований повышенного типа в Триесте (Италия) и моим коллегам в Брукхейвене за предоставленную возможность прочтения серии лекций, положенных в основу отдельных частей данной книги.

Кварки и глюоны

В настоящее время главным кандидатом на роль фундаментальной теории сильных адронных взаимодействий является модель кварков, взаимодействующих посредством обмена неабелевыми калибровочными полями. Кварковая модель представляет собой новый структурный уровень внутри адронов (например внутри протонов). Мы располагаем рядом убедительных доводов в пользу существования этого кваркового уровня строения материи.

Во-первых, большая величина сечений процессов глубоконеупругого лептон-адронного рассеяния указывает на наличие важных структурных элементов на расстояниях меньше 10^{-16} см, тогда как электромагнитный радиус протона порядка 10^{-13} см. Наблюдаемые в экспериментах угловые зависимости указывают на полужелтый спин адронных составляющих. Эти исследования поставили вопрос о правомерности рассмотрения точечных объектов в рамках теории сильных взаимодействий. Асимптотически свободные неабелевы калибровочные теории допускают такое рассмотрение [152].

Второй стимул для введения кварков в теорию вытекает из низкоэнергетической адронной спектроскопии. В самом деле, именно успех восьмиричного пути [82] явился первоначальной причиной введения кварковой модели. Мы полагаем теперь, что существование двух ароматов у легких кварков является основой изотопической инвариантности в ядерной физике. Введение в теорию более тяжелого «странного» кварка приводит к знаменитой мультиплетной структуре элементарных частиц, основанной на группе $SU(3)$.

Третий аргумент в пользу составной природы адронов вытекает из анализа их возбужденных состояний. Частицы, отличающиеся лишь угловым моментом, хорошо ложатся на известные «траектории Редже» [43]. В таком подходе состояния, соответствующие данной траектории, рассматриваются как орбитальные возбуждения некоторого основного состояния. Поведение траекторий, выявляющее устойчивую тенденцию к возрастанию массы состояний с увеличением углового момента, указывает на возрастание сил взаимодействия между адронными составляющими с ростом расстояния. Это обстоятельство явилось первоначальной мотивировкой для рассмотрения струнных моделей адронов.

Наконец, неоспоримым свидетельством в пользу кваркового строения материи стало открытие «атомов водорода» в физике

элементарных частиц. Сложная спектроскопия чармония и ипсилон-семейств великолепно объясняется моделями, основанными на нерелятивистском описании связанных состояний тяжелых кварков [69].

Несмотря на все эти успехи кварковой модели, изолированные кварки никогда не наблюдались в эксперименте. (Имеются некоторые указания на существование дробно-заряженных макроскопических частиц материи; возможно, они содержат несвязанные кварки или же свидетельствуют о наличии какого-то нового и еще более удивительного типа материи [125].) Эти основные составляющие материи не проявляют себя как свободные частицы в современных лабораторных экспериментах. Данное обстоятельство полностью противоречит эмпирическому и установленному в адронной физике правилу, согласно которому все, что может быть создано, рождается в действительности. Указанная трудность рождения свободных кварков привела к умозрительному заключению о строгом конфайнменте, т. е. невозможности вылетания свободных кварков из адронной материи. В самом деле, проще представить себе составляющую материи, которая никогда не может быть экспериментально получена в свободном виде, чем вообразить приближенное удержание кварков, апеллируя к существованию некоторого неестественного большого подавляющего фактора в теории, которая, по-видимому, не содержит никакого большого безразмерного параметра.

Но как можно приписать черты реальности объекту, который не может быть создан? Не является ли такой подход всего лишь математическим трюком? Мы покажем, что калибровочные теории допускают существование простого механизма, приводящего к бесконечной энергии изолированных составляющих адронной материи. В этих теориях пара кварк — антикварк подвергается действию силы притяжения, не равной нулю даже для асимптотически больших расстояний между кварком и антикварком. Линейно растущий на больших расстояниях потенциал взаимодействия лежит в основе существования всех моделей кваркового конфайнмента.

Рассмотрим поток силовых линий «глюо-электрического» поля, связывающего кварки. В обычном электромагнетизме силовые линии электрического поля распределены по всему пространству, что соответствует закону Кулона, в котором сила спадает обратно пропорционально квадрату расстояния. Если каким-либо образом исключить из теории безмассовые электромагнитные поля, то кулоновская картина силовых линий не будет соответствовать решению полевых уравнений. Если при этом устранить безмассовых полей не нарушает закона Гаусса, означающего, что кварки являются ис-

точником электрического потока, то силовые линии последнего должны стягиваться в трубки постоянного потока, схематически показанные на рис. 1.1. Эти трубки могут начинаться и оканчиваться только на кварках и антикварках. Каждая такая трубка потока является реальным физическим объектом, имеющим конечную энергию на единицу длины. Подобная картина обуславливает линейный рост потенциала взаимодействия между кварками [115].

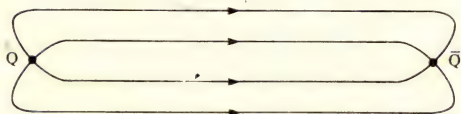


Рис. 1.1. Трубка потока от кварка к антикварку.

Простой моделью этого явления служит сверхпроводник второго рода, содержащий примесь магнитных монополей. В силу эффекта Мейсснера [135] магнитное поле не может проникать внутрь сверхпроводника. Но если ввести внутрь сверхпроводника гипотетический магнитный монополи, то силовые линии магнитного поля должны пройти где-то в сверхпроводник. В этом случае роль «глюоо-электрического» потока играет магнитное поле, которое «высверлит» трубку материала с обычными свойствами внутри сверхпроводника. Эта трубка должна оканчиваться либо антимонополем, либо выходить на границу системы. Такие трубки были экспериментально обнаружены во внешних магнитных полях [100].

Другая реализация подобного механизма происходит в модели мешков [39]. В этой модели не накладывается ограничений на глюонные поля внутри мешка, представляющего адрон, но распространение полей вне мешка запрещено постулированием соответствующих граничных условий. Попытка извлечь отдельный кварк из протона приведет к вытягиванию мешка, причем вытянутая часть мешка будет содержать глюоо-электрический поток от вытягиваемого кварка к остальным составляющим протона.

Описанные модели интересны с феноменологической точки зрения, но содержат слишком большой произвол, чтобы лечь в основу фундаментальной теории. В поисках более изящной модели теории остановились на неабелевых калибровочных полях. Последние описывают глюоны, которые по аналогии с электродинамикой являются безмассовыми калибровочными полями, взаимодействующими с кварками. Дополнительные степени свободы в группе внутренней симметрии таковы, что они приводят к самодействию глюонных полей. Голые безмассовые поля материи несут заряды, которые отличают их друг от друга. Предположение конфайнмента

заключается в том, что исходная теория с безмассовыми заряженными частицами нестабильна по отношению к конденсации вакуума в состояние, в котором присутствуют только массивные заряженные возбуждения. В таких состояниях глюонный поток, связывающий кварки, образует трубки, приводя к линейному конфайнменту. В недавних исследованиях в области физики элементарных частиц делалось много попыток показать, что это действительно так.

Явление конфайнмента приводит к качественному отличию теории сильных взаимодействий от теорий электромагнитных и слабых взаимодействий. Фундаментальные поля, входящие в лагранжиан, явным образом не проявляются в наблюдаемом спектре адронов. Ненаблюдаемость свободных кварков и глюонов приводит к заключению, что все наблюдаемые сильновзаимодействующие частицы являются синглетными по калибровочной группе связанными состояниями этих фундаментальных составляющих адронной материи.

В обычной кварковой модели барионы являются связанными состояниями трех кварков. Поэтому калибровочная группа должна допускать синглетные образования из трех объектов, преобразующихся по фундаментальному представлению. Это обстоятельство послужило основанием для выбора группы $SU(3)$ в качестве калибровочной группы сильных взаимодействий. Последнюю не следует смешивать с нарушенной группой симметрии $SU(3)$, представленной в мультиплетах элементарных частиц. Ирония судьбы состоит в том, что одна из главных причин введения кварков сейчас рассматривается лишь как случайная симметрия. Калибровочная симметрия сильных взаимодействий скрыта механизмом конфайнмента, который допускает наблюдаемость лишь синглетных состояний.

При изложении материала данной книги мы принимаем, возможно, слишком приближенно, что сильные взаимодействия можно рассматривать изолированно от электромагнитных, слабых и гравитационных взаимодействий, которые значительно слабее. Но это не препятствует возможным применениям представленного здесь метода к другим типам взаимодействий. В самом деле, для построения непротиворечивой теории мира, возможно, потребуется достигнуть Великого объединения. Тем не менее при современных лабораторных энергиях выход за рамки хорошо изученных методов теории возмущений требуется лишь для описания сильных взаимодействий. Поэтому мы ограничимся в нашем обсуждении кварками и глюонами.

Конфайнмент в неабелевых калибровочных теориях сильных взаимодействий наиболее очевидным образом проявляется в рамках предложенной Вильсоном [179] формулировки теории на пространственно-временной решетке. На первый взгляд такой подход кажется немного странным, поскольку вакуум не имеет кристаллической структуры. В самом деле, повседневная экспериментальная работа с релятивистскими частицами не выявляет каких-либо отклонений от непрерывной симметрии, определяемой группой Лоренца. Почему же тогда в последние годы теоретики затратили так много времени, пытаясь изучить теорию поля на пространственно-временной решетке?

Введение решетки представляет собой математический прием. Он обеспечивает обрезание ультрафиолетовых расходимостей, являющихся бичом квантовой теории поля. Как и любая регуляризация, решеточное обрезание должно быть устранено после перенормировки. Физические результаты могут быть получены только в непрерывном пределе, когда шаг решетки стремится к нулю.

Но бесконечности и связанная с ними необходимость перенормировки возникли еще у истоков релятивистской квантовой механики. Огромный успех квантовой электродинамики был достигнут без дискретизации пространства. Почему тогда мы отказываемся от хорошо зарекомендовавшей себя перенормировочной процедуры в рамках теории возмущений и предпочитаем другую схему обрезания?

Мы пришли к решетке из-за уникального явления конфайнмента в теории сильных взаимодействий. Это явление существенно непертурбативное. Свободная теория с исчезающе малой константой связи не является сколь-нибудь разумным приближением к реальному физическому миру. Ренормгрупповые аргументы, детально представленные в последующих главах, указывают на существенные сингулярности, возникающие при рассмотрении свойств адронов как функций калибровочной константы связи. Это находится в резком противоречии с огромными успехами квантовой электродинамики, где теория возмущений играет центральную роль. Наиболее удобная схема регуляризации основана на технике диаграмм Фейнмана; расчет данного физического процесса ведется посредст-

вом вычисления отдельных диаграмм, и если в какой-либо из диаграмм встречается расходимость, то она устраняется. Чтобы выйти за рамки диаграммного подхода, необходима непerturbативная процедура обрезания. Именно в этом заключается главное достоинство решетки, которая обрезает все волны, длина которых меньше удвоенного шага решетки. Это происходит без использования каких-либо приближенных разложений.

На решетке теория поля становится математически хорошо определенной и может быть изучена различными методами. Решеточная теория возмущений, хотя и встречается с некоторыми техническими трудностями, воспроизводит все обычные результаты других схем регуляризации. Дискретное пространство-время особенно удобно для разложения сильной связи. Примечательно, что в этом пределе конфайнмент получается автоматически, и теория приводит к картине взаимодействия кварков, находящихся на концах струн с конечной энергией на единицу длины. Последние исследования связаны с демонстрацией сохранения этого явления в непрерывном пределе.

Решеточная формулировка выявляет тесную связь между теорией поля и статистической механикой. В самом деле, разложение сильной связи в теории поля эквивалентно высокотемпературному разложению в статистической механике. Глубокое взаимопроникновение этих дисциплин выявляется в фейнмановской формулировке квантовой механики на языке функциональных интегралов¹⁾ [61, 62, 74]. В евклидовом пространстве функциональный интеграл эквивалентен статистической сумме соответствующей статистической системы. Квадрат теоретико-полевой константы связи прямо соответствует температуре. Таким образом, физика элементарных частиц получает в свое распоряжение весь арсенал методов теории конденсированных сред.

В решеточной теории конфайнмент естественным образом возникает в пределе сильной связи. Но это не та область прямого физического интереса, где необходим переход к непрерывному пределу. Решеточная константа связи является голой константой связи и зависит от решетки. Неабелевы калибровочные теории обладают свойством асимптотической свободы, которое означает, что в пределе малых расстояний эффективная константа связи

¹⁾ Автор использует термин *path integral* (интеграл по путям). В переводе он заменен на термин «функциональный интеграл», как более распространенный в советской литературе по теории квантованных полей. — *Прим. ред.*

стремится к нулю. Это замечательное свойство позволяет предсказать наблюдаемое скейлинговое поведение в глубоконеупругих процессах и послужило одним из первоначальных аргументов в пользу неабелевой калибровочной теории сильных взаимодействий. Следовательно, в решеточной теории голая константа связи должна исчезать при стремлении шага решетки к нулю, соответствующему непрерывному пределу. Таким образом, мы неизбежно переходим из высокотемпературной в низкотемпературную область. На этом пути статистическая система может испытывать фазовый переход. Соответствующие качественные изменения физических характеристик системы могут лишь препятствовать обнаружению конфайнмента в неабелевой теории. В последующих главах мы покажем, что эти затруднения можно обойти в четырехмерной теории сильных взаимодействий с калибровочной симметрией $SU(3)$.

Хотя конечная цель решеточной калибровочной теории состоит в достижении понимания физики адронов, на решетке возникает ряд специфических и весьма интересных явлений. Мы увидим нетривиальную фазовую структуру различных моделей, некоторые из которых не соответствуют какой-либо непрерывной теории поля. Решеточная формулировка в значительной степени неоднозначна, поэтому нефизические фазовые переходы могут появляться и исчезать. Мы увидим также, что статистическая механика калибровочных моделей выявляет любопытную аналогию с магнетиками во вдвое меньшем числе пространственно-временных измерений. Даже квантовая электродинамика обнаруживает интересную структуру в некоторых решеточных формулировках. Этот богатый спектр явлений привел в последние годы к популярности решеточных полевых теорий и явился причиной написания данной книги.

Фейнмановская формулировка квантовой механики на языке функциональных интегралов выявляет глубокую связь со статистической механикой. Данная глава посвящена такой взаимосвязи в простом случае движения нерелятивистской частицы в потенциальном поле. Начав со статистической суммы, представляющей собой функциональный интеграл на временной решетке мнимого времени, мы затем покажем, как формализм матрицы переноса сводит задачу к диагонализации оператора в обычном квантовомеханическом гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций [44]. Переходя к непрерывному пределу на временной решетке, мы получаем канонический гамильтониан. Эта трактовка полностью идентична ранней работе Фейнмана [74], за исключением использования мнимого времени.

Рассмотрим сначала лагранжиан свободной частицы массы m , движущейся в потенциале $V(x)$:

$$L(x, \dot{x}) = K(\dot{x}) + V(x), \quad (3.1)$$

$$K(\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad (3.2)$$

где \dot{x} — временная производная координаты x . Мы не будем рассматривать потенциалы, зависящие от скорости. Отметим необычный знак плюс между двумя слагаемыми в выражении (3.1). Это следует из нашей формулировки функционального интеграла в мнимом времени. Использование последнего улучшает сходимость интегралов, сохраняя для диагонализации обычную форму гамильтониана.

Для любой траектории действие имеет вид

$$S = \int dt L(\dot{x}(t), x(t)); \quad (3.3)$$

оно входит в функциональный интеграл

$$Z = \int [dx(t)] e^{-S}, \quad (3.4)$$

который берется по всем траекториям $x(t)$. Выражение (3.4) плохо определено. Чтобы придать ему четкий смысл, явно задав все воз-

возможные траектории, введем обрезание в виде временной решетки. Помещая нашу систему во временной интервал длины τ , разделим этот интервал на

$$N = \tau/a \quad (3.5)$$

одинаковых отрезков, где a — шаг решетки во временном направлении. Связанную с i -м отрезком координату обозначим x_i . Соответствующая картина показана на рис. 3.1. Заменяя временную производную от x на конечную разность¹⁾, перепишем действие в виде суммы

$$S = a \sum_i \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{a} \right)^2 + V(x_i) \right]. \quad (3.6)$$

Интеграл (3.4) определяется теперь как интеграл по всем координатам x_i :

$$Z = \int \left(\prod_i dx_i \right) e^{-S}. \quad (3.7)$$

Выражение (3.7) имеет в точности вид статистической суммы, описывающей некоторую систему в статистической механике. Мы

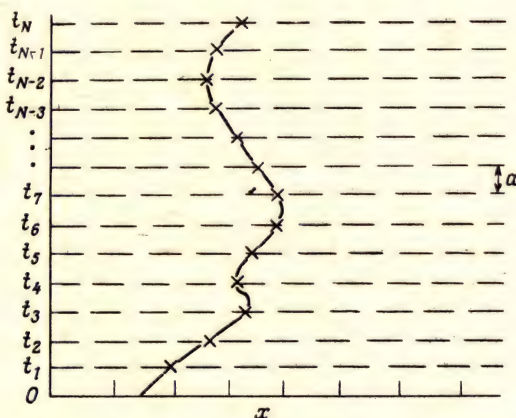


Рис. 3.1. Решетка дискретного времени [53].

¹⁾ Эта несимметричная, так называемая «правая разность», не является единственно возможной формой дискретного представления производной. Ниже в книге используется также представление производной в виде центральной, или симметричной, разности (см. (5.17)). — Прим. ред.

имеем одномерную цепочку координат x_i . Действие должно иметь вид произведения обратной температуры на гамильтониан, соответствующий данной статистической механике. Покажем теперь, что вычисление данной статистической суммы сводится к диагонализации квантовомеханического гамильтониана, получаемого из действия каноническими методами. Воспользуемся для этой цели матрицей переноса.

Ключевую роль в подходе, основанном на матрице переноса, играет тот факт, что локальный характер действия в выражении (3.6) позволяет переписать статистическую сумму в виде матричного произведения:

$$Z = \int \prod_i dx_i T_{x_{i+1}, x_i}, \quad (3.8)$$

где элементы матрицы переноса определяются формулой

$$T_{x', x} = \exp \left[-\frac{m}{2a} (x' - x)^2 - \frac{a}{2} (V(x') + V(x)) \right]. \quad (3.9)$$

Оператор T действует в гильбертовом пространстве квадратично-интегрируемых функций со стандартным определением внутреннего произведения:

$$\langle \psi' | \psi \rangle = \int dx \psi'^*(x) \psi(x). \quad (3.10)$$

Введем ненормируемый базис состояний $\{|x\rangle\}$, такой, что

$$|\psi\rangle = \int dx \psi(x) |x\rangle, \quad (3.11)$$

$$\langle x' | x \rangle = \delta(x' - x), \quad (3.12)$$

$$1 = \int dx |x\rangle \langle x|. \quad (3.13)$$

Канонически сопряженные операторы \hat{p} и \hat{x} удовлетворяют соотношениям

$$\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle, \quad (3.14)$$

$$[\hat{p}, \hat{x}] = -i, \quad (3.15)$$

$$e^{-i\hat{p}\Delta} |x\rangle = |x + \Delta\rangle. \quad (3.16)$$

В этом гильбертовом пространстве оператор T определяется через его матричные элементы

$$\langle x' | T | x \rangle = T_{x', x}, \quad (3.17)$$

где $T_{x',x}$ введено в (3.9). Вводя периодические граничные условия для нашей решетки из N элементов, получим для функционального интеграла следующее компактное выражение:

$$Z = \text{Tr}(T^N). \quad (3.18)$$

Оператор T можно выразить через сопряженные переменные \hat{p} и \hat{x} :

$$T = \int d\Delta e^{-aV(\hat{x})/2} e^{-\Delta^2 m/(2a) - i\hat{p}\Delta} e^{-aV(\hat{x})/2}. \quad (3.19)$$

Чтобы убедиться в справедливости этого равенства, достаточно проверить, что правая часть имеет матричные элементы вида (3.9). Интеграл по Δ является гауссовым и равен

$$T = (2\pi a/m)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}aV(\hat{x})} e^{-\frac{1}{2}a\hat{p}^2/m} e^{-\frac{1}{2}aV(\hat{x})}. \quad (3.20)$$

Связь с обычным квантовомеханическим гамильтонианом выявляется в пределе малого шага решетки. Когда a мало, экспоненты в (3.20) преобразуются к виду

$$T = (2\pi a/m)^{1/2} e^{-aH + O(a^3)}, \quad (3.21)$$

где

$$H = \hat{p}^2/(2m) + V(\hat{x}). \quad (3.22)$$

А это и есть канонический гамильтониан, соответствующий лагранжиану (3.1).

Итак, процедура перехода от функционального интеграла к формулировке квантовой механики в гильбертовом пространстве состоит из трех этапов. Сначала функциональный интеграл определяется на временной решетке. Затем строится матрица переноса и определяется гильбертово пространство, в котором она действует. Наконец, взятие логарифма от матрицы переноса и выделение коэффициента со знаком минус при линейном по шагу решетки члене дает гамильтониан. Физически матрица переноса описывает изменение состояния системы при переходе от данного момента времени к следующему. Такие временные трансляции генерируются гамильтонианом. Обозначая i -е собственное значение матрицы переноса через λ_i , из уравнения (3.18) находим

$$Z = \sum_i \lambda_i^N. \quad (3.23)$$

Поскольку число временных интервалов N в непрерывном пределе стремится к бесконечности, в выражении (3.23) доминирует наи-

большее собственное значение λ_0 :

$$Z = \lambda_0^N \times [1 + O(\exp[-N \ln(\lambda_0/\lambda_1)])]. \quad (3.24)$$

Следовательно, в статистической механике термодинамические свойства системы определяются наибольшим собственным значением матрицы переноса. В обычной квантовой механике соответствующий собственный вектор есть собственное состояние гамильтониана с наименьшей энергией, или, иначе говоря, основное состояние, а в теории поля — вакуум. Заметим, что в данном случае связь между вещественным и мнимым временем тривиальна. Независимо от того, является ли генератором временных трансляций H или iH , мы должны диагонализировать один и тот же оператор.

В статистической механике важную роль играют корреляционные функции статистических переменных, соответствующие функциям Грина в теории поля. Они получаются внесением под знак функционального интеграла полиномов от фундаментальных переменных. Введем определение двухточечной функции:

$$\langle x_i x_j \rangle = (1/Z) \int \left(\prod_k dx_k \right) x_i x_j e^{-S}. \quad (3.25)$$

В терминах матрицы переноса при $i - j > 0$ это сводится к выражению

$$\langle x_i x_j \rangle = (1/Z) \text{Tr}(T^{N-i+j} \hat{x} T^{i-j} \hat{x}). \quad (3.26)$$

Устремляя длину нашего временного интервала к бесконечности при фиксированном разделении i и j , получаем

$$\langle x_i x_j \rangle = \langle 0 | \hat{x}(T/\lambda_0)^{i-j} \hat{x} | 0 \rangle, \quad (3.27)$$

где $|0\rangle$ — вакуумное состояние, доминирующее в выражении (3.24). При переходе к непрерывному пределу $a \rightarrow 0$ фиксируем временной интервал между i и j :

$$t = (i-j)a. \quad (3.28)$$

Введем теперь зависящий от времени оператор

$$\hat{x}(t) = e^{Ht} \hat{x} e^{-Ht}, \quad (3.29)$$

соответствующий оператору квантовомеханической координаты в представлении Гейзенберга, преобразованному к мнимому времени. Определяя временное упорядочение с целью допущения обоих зна-

ков разделения во времени, примем

$$\begin{aligned}\langle x_i x_j \rangle &= \langle 0 | \mathcal{T}(\hat{x}(t) \hat{x}(0)) | 0 \rangle \\ &= \theta(t) \langle 0 | \hat{x}(t) \hat{x}(0) | 0 \rangle + \theta(-t) \langle 0 | \hat{x}(0) \hat{x}(t) | 0 \rangle,\end{aligned}\quad (3.30)$$

где

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Полученный результат является отражением следующего общего заключения: корреляционные функции статистической механики являются прямым аналогом T -произведений соответствующих квантованных полей. Именно это обстоятельство позволяет использовать в физике элементарных частиц методы статистической механики.

В данной главе продемонстрирована глубокая взаимосвязь между математическими методами статистической механики и квантовой механики. Более общее утверждение состоит в том, что d -мерная квантовая теория поля эквивалентна d -мерной классической статистической системе.

Квантовая статистическая механика также имеет прямую связь с квантовой теорией поля. Из уравнений (3.18) и (3.21) следует

$$Z = (2\pi a/m)^{N/2} \text{Tr}(e^{-aNH}). \quad (3.32)$$

Если теперь отождествить

$$T = (aN)^{-1} \quad (3.33)$$

с температурой и не переходить к пределу бесконечного времени, то из (3.32) следует, что функциональный интеграл в периодическом временном «ящике» представляет собой статистическую сумму при температуре, равной обратной величине периода по времени. Следовательно, формулировка на языке функциональных интегралов позволяет изучать квантовую статистическую механику первоначальной ($d - 1$)-мерной теории. Мы еще вернемся к этому обстоятельству, когда будем рассматривать калибровочные теории при конечных физических температурах и фазовые переходы от конфайнмента к деконфайнменту.

Упражнения

1. Рассмотрите гармонический осциллятор с $V(x) = 1/2kx^2$. Диагонализуйте оператор T , определяемый выражением (3.20). (Указание. Используйте оператор вида $1/2p^2 + 1/2\omega^2x^2$, который коммутирует с T и, следовательно, может быть одновременно диагонализирован [53].)

2. В примере с гармоническим осциллятором найдите «пропагатор» $\langle x_i x_j \rangle$.

3. Покажите, что $a^{-2} \langle (x_{i+1} - x_i)^2 \rangle$ расходится при стремлении a к нулю, а расщепленное произведение $a^{-2} \langle (x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1}) \rangle$ стремится к $-\langle 0 | p^2 | 0 \rangle$ в непрерывном пределе. Откуда возникает знак минус?

4. Вычислите флуктуации пропагатора

$$D^2(i, j) = \langle (x_i x_j)^2 \rangle - \langle x_i x_j \rangle^2.$$

Покажите, что флуктуации расщепленного точечного произведения в упражнении 2 расходятся при $a \rightarrow 0$. Получите теорему вириала для непрерывной теории:

$$\langle 0 | \hat{p}^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{x} V'(\hat{x}) | 0 \rangle.$$

Отсюда следует отсутствие больших флуктуаций у среднего квадрата импульса.

Простейшей квантовой теорией поля является теория свободных скалярных частиц. На решетке она переходит в гауссову модель статистической механики. Мы получим точное решение этой модели в качестве подготовительного этапа к рассмотрению решеточных теорий поля. Как и в обычной непрерывной теории при нахождении решения ключевую роль играет метод преобразований Фурье. Мы завершим эту главу некоторыми общими замечаниями, относящимися к взаимодействующим скалярным полям.

Начнем со стандартной лагранжевой плотности для самосопряженного скалярного поля

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (4.1)$$

Здесь $\phi(x)$ — вещественная функция четырех пространственно-временных координат x_μ . Наше рассмотрение легко обобщается на случай пространства-времени произвольной размерности и комплексных полей. Греческие индексы относятся к векторным величинам и пробегают значения от одного до четырех. Подразумевается суммирование по повторяющимся индексам, как в (4.1), причем, поскольку мы работаем в евклидовом пространстве, нет необходимости в явном использовании метрического тензора. Каждой конфигурации поля соответствует действие

$$S = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (4.2)$$

Фейнмановский функциональный интеграл соответствует суммированию по всем конфигурациям:

$$Z = \int [d\phi] e^{-S}, \quad (4.3)$$

где, как и в предыдущей главе, необходимо определить меру интегрирования.

Сразу рассмотрим четырехмерную гиперкубическую решетку. Иначе говоря, ограничимся рассмотрением координат вида

$$x_\mu = an_\mu, \quad (4.4)$$

где a — шаг решетки, а n_μ — четырехмерный вектор с целочисленными компонентами. С целью инфракрасного обрезания будем полагать, что каждая компонента вектора n пробегает конечное число N возможных значений:

$$-N/2 < n_\mu \leq N/2. \quad (4.5)$$

Вне этой области мы будем считать решетку периодической, для чего отождествим n с $n + N$. Следовательно, наша решетка имеет N^4 узлов. Заменяем теперь производные ϕ на конечные разности:

$$\partial_\mu \phi(x_\nu) \rightarrow (\phi_{n_\nu + \delta_{\nu\mu}} - \phi_{n_\nu})/a, \quad (4.6)$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера:

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu, \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (4.7)$$

Действие представляет собой сумму

$$S = a^4 \left[\sum_{\{m, n\}} (\phi_m - \phi_n)^2 / (2a^2) + \sum_n m^2 \phi_n^2 / 2 \right], \quad (4.8)$$

где $\{m, n\}$ обозначает множество всех пар соседних узлов. Мера функционального интеграла определяется в этом случае интегрированием по всем решеточным полям:

$$Z = \int \left(\prod_n d\phi_n \right) e^{-S}. \quad (4.9)$$

Здесь следует сказать, что действие квадратично зависит от полевых переменных:

$$S = \frac{1}{2} \phi_m M_{mn} \phi_n, \quad (4.10)$$

где M — квадратная матрица размерности $N^4 \times N^4$ и принято обычное соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Интеграл в (4.9) имеет стандартную гауссову форму и равен

$$Z = |M/2\pi|^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.11)$$

Здесь двумя вертикальными линиями обозначен детерминант соответствующей матрицы. Введем теперь фурье-преобразование на решетке. Это позволит диагонализировать матрицу M и сделать вычисление детерминанта тривиальным.

Пусть f_n — произвольная комплексная функция, определенная на узлах решетки. Ее фурье-образ определяется выражением

$$\hat{f}_k = F_{kn} f_n = \sum_n f_n e^{2\pi i k_\mu n_\mu / N}. \quad (4.12)$$

Индекс k также имеет четыре целочисленные компоненты, пробегающие значения (4.5). Линейное преобразование (4.12) легко обратить с помощью тождества

$$\sum_k e^{-2\pi i k \cdot n/N} = N^4 \prod_{\mu} \delta_{n_{\mu}, 0} \equiv N^4 \delta_{n, 0}. \quad (4.13)$$

Поэтому мы имеем

$$(F^{-1})_{nk} = N^{-4} e^{-2\pi i k \cdot n/N} = N^{-4} F_{kn}^*, \quad (4.14)$$

или
$$f_n = N^{-4} \sum_k \tilde{f}_k e^{-2\pi i k \cdot n/N}. \quad (4.15)$$

Роль рядов Фурье выявляется при рассмотрении сумм от локальных квадратичных форм, таких, как в решеточном действии (4.10). В этом случае тождества

$$\sum_n f_n^* g_n = N^{-4} \sum_k \tilde{f}_k^* \tilde{g}_k, \quad (4.16)$$

$$\sum_n f_{n_{\mu} + \delta_{\mu\nu}}^* g_n = N^{-4} \sum_k \tilde{f}_k^* \tilde{g}_k e^{2\pi i k_{\nu}/N} \quad (4.17)$$

сводят действие к выражению

$$S = a^4 N^{-4} \sum_k \frac{1}{2} \tilde{M}_k |\tilde{\phi}_k|^2, \quad (4.18)$$

где

$$\tilde{M}_k = m^2 + 2a^{-2} \sum_{\mu} (1 - \cos(2\pi k_{\mu}/N)). \quad (4.19)$$

Преобразование Фурье позволило диагонализировать M :

$$M_{mn} = a^4 N^{-4} \sum_k F_{mk}^* F_{nk} \tilde{M}_k. \quad (4.20)$$

Чтобы вычислить детерминант этой матрицы заметим, что уравнение (4.14) дает

$$|N^{-4} F^*| = |F|^{-1}. \quad (4.21)$$

Отсюда получаем для нашего функционального интеграла следующее точное выражение:

$$Z = |M/2\pi|^{-\frac{1}{2}} = \prod_k (a^4 \tilde{M}_k/2\pi)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.22)$$

Однако выражение (4.22) в таком виде не очень удобно. Чтобы получить функции Грина, вернемся к виду действия (4.10) и введем

внешние источники J_n , связанные с полем ϕ и также расположенные в узлах решетки. В соответствии с этим рассмотрим более общий вид действия

$$S(J) = \frac{1}{2} \phi_m M_{mn} \phi_n - J_n \phi_n. \quad (4.23)$$

Статистическая сумма теперь зависит от источников:

$$Z(J) = \int [d\phi] e^{-S(J)}. \quad (4.24)$$

Эта величина является производящей функцией для функций Грина, которые определяются через ее производные по источникам:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{n_1} \dots \phi_{n_j} \rangle &= Z^{-1} \int [d\phi] e^{-S} \phi_{n_1} \dots \phi_{n_j} \Big|_{J=0} \\ &= Z^{-1} \left\{ \frac{d}{dJ_{n_1}} \dots \frac{d}{dJ_{n_j}} Z(J) \right\} \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Выделение из выражения (4.23) полного квадрата и соответствующий сдвиг переменных интегрирования приводят к следующему точному выражению для производящей функции свободной теории:

$$Z(J) = Z(0) \exp \left(\frac{1}{2} J_m (M^{-1})_{mn} J_n \right), \quad (4.26)$$

в котором $Z(0)$ дается формулой (4.22). Отсюда следует, что пропагатор, или двухточечная функция Грина, есть не что иное, как обратная матрица M :

$$\langle \phi_m \phi_n \rangle = (M^{-1})_{mn}. \quad (4.27)$$

В импульсном пространстве обращение матрицы выполняется тривиально:

$$\langle \phi_m \phi_n \rangle = a^{-4} N^{-4} \sum_k \tilde{M}_k^{-1} e^{2\pi i k \cdot (m-n)/N}. \quad (4.28)$$

Чтобы привести это выражение к более знакомому виду, мы сначала устремим N к бесконечности и перейдем от суммирования по импульсам к интегрированию с помощью подстановок

$$q_\mu = 2\pi k_\mu / (Na), \quad (4.29)$$

$$a^{-4} N^{-4} \sum_k \rightarrow \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}. \quad (4.30)$$

Интеграл по каждой компоненте q берется в пределах

$$-\pi/a < q_\mu \leq \pi/a. \quad (4.31)$$

Это условие явным образом показывает воздействие решеточного обрезания на импульсное пространство. Теперь пропагатор принимает вид

$$\langle \phi_m \phi_n \rangle = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq \cdot x}}{m^2 + 2a^{-2} \sum_{\mu} [1 - \cos(aq_\mu)]}, \quad (4.32)$$

где

$$x_\mu = -a(m_\mu - n_\mu). \quad (4.33)$$

Переходя к непрерывному пределу $a \rightarrow 0$, разложим косинус

$$2a^{-2} \sum_{\mu} (1 - \cos(aq_\mu)) = q^2 + O(a^2) \quad (4.34)$$

и получим выражение

$$\langle \phi_m \phi_n \rangle = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq \cdot x}}{m^2 + q^2} + O(a^2), \quad (4.35)$$

которое представляет собой обычный фейнмановский пропагатор в евклидовом пространстве.

До сих пор мы рассматривали свободное поле. Добавим теперь к нашему действию член, описывающий взаимодействие:

$$S = \frac{1}{2} \phi_m M_{mn} \phi_n - J_n \phi_n + \sum_n V_I(\phi_n). \quad (4.36)$$

Полный потенциал ϕ включает в себя массовый член из (4.8) и равен

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + V_I(\phi). \quad (4.37)$$

Минимумы этой функции лежат в основе квазиклассической трактовки, которой мы не будем здесь касаться. В качестве конкретного примера рассмотрим обычную теорию ϕ^4 , для которой

$$V_I(\phi) = g_0 \phi^4. \quad (4.38)$$

Здесь g_0 — голая константа связи, зависящая от решеточного обрезания. Полная производящая функция для теории с взаимодействием по-прежнему имеет вид (4.24):

$$Z(J) = \int [d\phi] e^{-S(J)}. \quad (4.39)$$

Заметим, что потенциал $V(\phi)$ должен быть ограничен снизу, так как в противном случае этот интеграл не имеет смысла. В частности, теория ϕ^4 с отрицательной константой связи не существует и поэтому не является аналитичной по g_0 в окрестности нуля. Теория возмущений по g_0 приводит в лучшем случае к асимптотическим рядам [67].

Обычное разложение теории возмущений вытекает из формального преобразования уравнения (4.25) к виду

$$Z(J) = \exp \left(\sum_n V_n(d/dJ_n) \right) Z_0(J), \quad (4.40)$$

где $Z_0(J)$ — производящая функция свободной теории (4.26). Разложение в ряд экспоненты в этом уравнении дает фейнмановские ряды с вершинами, определяемыми взаимодействием, и пропагаторами, определяемыми $Z_0(J)$.

Функции Грина, получаемые дифференцированием Z по источникам, представляют собой n -точечные функции общего вида и в общем случае содержат несвязанные куски. В частности, если ϕ имеет отличное от нуля вакуумное среднее, то может оказаться предпочтительным вычесть его и изучать связный пропагатор

$$\langle \phi_m \phi_n \rangle_c = \langle \phi_m \phi_n \rangle - \langle \phi_m \rangle \langle \phi_n \rangle. \quad (4.41)$$

В общем случае связная функция Грина определяется соответствующей производящей функцией, являющейся просто логарифмом Z :

$$F(J) = \ln(Z(J)), \quad (4.42)$$

$$\langle \phi_{n_1} \dots \phi_{n_j} \rangle_c = \left(\frac{d}{dJ_{n_1}} \dots \frac{d}{dJ_{n_j}} F(J) \right) \Big|_{J=0}. \quad (4.43)$$

Заметим, что аналог $F(J)$ в статистической механике пропорционален свободной энергии.

Мы завершим эту главу краткими замечаниями, относящимися к разложению сильной связи для рассматриваемой скалярной теории. Для теории ϕ^4 , определяемой уравнением (4.38), произведем замену переменных интегрирования в функциональном интеграле $\phi \rightarrow g^{1/4} \phi$ и совершим формальное преобразование того же типа, что и в формуле (4.40). В результате получим

$$\begin{aligned} Z(g^4 J) &= g_0^{-N^4/4} \int [d\phi] e^{-\frac{1}{2} g_0^{-1} \phi M \phi} e^{-\sum_n (\phi_n^4 - J_n \phi_n)} \\ &= g_0^{-N^4/4} \exp \left(-\frac{1}{2} g_0^{-1} \frac{d}{dJ} M \frac{d}{dJ} \right) \prod_n f(J_n), \end{aligned} \quad (4.44)$$

где $f(J)$ — обычный одномерный интеграл

$$f(J) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{-(\phi^4 - J\phi)}. \quad (4.45)$$

Разложение в ряд экспоненты в правой части выражения (4.44) приводит к разложению сильной связи по степеням $g_0^{-1/2}$. К сожалению, в непрерывном пределе матрица M растет, и, следовательно, для фиксированной константы связи разложение уже не будет разложением по малому параметру. Поскольку нас больше интересуют калибровочные теории, мы не будем рассматривать здесь различные приемы, разработанные с целью обойти эту проблему. Мы только хотим отметить, что разложение сильной связи является совершенно естественным при использовании решетки [7, 18].

Упражнения

1. Проверьте формулу (4.19).

2. Покажите, что использование подходящей нормировки для полевой переменной приводит действие к виду

$$S = \sum_m \phi_m^2 + K \sum_{\{mn\}} \phi_m \phi_n.$$

Покажите, что в непрерывном пределе константа K («хоппинг-параметр») стремится к единице со скоростью, зависящей от массы.

3. Можно ввести непертурбативное обрезание, отбрасывая фурье-компоненты поля, которые несут импульс, больший некоторого параметра обрезания. Какова связь этого подхода с введением решетки в пространстве-времени?

В этой главе мы обратимся к еще не решенной до конца проблеме — к решеточной формулировке для фермионных полей. Сложности, связанные со спинорными частицами, возникают уже на классическом уровне, поскольку простое обобщение идей предыдущей главы на этот случай не приводит к простому спектру частиц. Необходимо добавить в действие дополнительные члены, которые исчезают в «наивном» непрерывном пределе. Эти члены необходимы для устранения некоторых решеточных артефактов¹⁾, искажающих классические симметрии теории. Данная проблема еще не получила своего окончательного решения.

Прежде чем приступить к рассмотрению этих вопросов, мы должны ввести понятие антикоммутирующих числовых переменных и определить правила интегрирования по этим переменным. В этом случае функциональный интеграл уже не является суммой, а представляет собой некоторое линейное отображение функций антикоммутирующих переменных на множество комплексных чисел. Мы введем также антикоммутирующие источники для динамических полей. Как и в гл. 4, функции Грина получаются дифференцированием по этим источникам. Как интегрирование, так и дифференцирование по антикоммутирующим переменным имеют ряд удобных свойств, аналогичных свойствам обычных интегралов и производных. Но между ними имеются и некоторые различия. В частности, фермионное интегрирование и дифференцирование представляют собой по существу одну и ту же операцию.

Как и в предыдущей главе, мы начнем с непрерывной плотности лагранжиана для свободного поля, в данном случае для четырехкомпонентного дираковского спинорного поля

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\not{\partial} + m)\psi. \quad (5.1)$$

Здесь $\not{\partial}$ представляет собой обычную сумму

$$\not{\partial} = \partial_\mu \gamma_\mu, \quad (5.2)$$

¹⁾ Термин «артефакт», малоупотребительный в русском языке, обозначает искусственно полученное явление или образование, не свойственное природе изучаемого объекта. В данном случае «решеточный артефакт» — свойство решеточной формулировки, отсутствующее в соответствующей локальной теории поля. — *Прим.ред.*

где γ_μ образуют набор евклидовых матриц Дирака 4×4 со следующей алгеброй:

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad (5.3)$$

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu. \quad (5.4)$$

Как обычно, определяем сопряженный спинор

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4. \quad (5.5)$$

Введем также

$$\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \gamma_5^\dagger. \quad (5.6)$$

Для матриц γ удобно выбрать следующее представление:

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.7)$$

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Здесь матричные элементы сами являются матрицами 2×2 , а σ_i — обычные матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Заметим, что лагранжиан (5.1) инвариантен относительно преобразования

$$\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi. \quad (5.13)$$

Эта симметрия связана с сохранением числа фермионов. При отсутствии массы m теория обладает также «киральной», или « γ_5 -инвариантностью», т. е. инвариантностью относительно подстановки

$$\psi \rightarrow e^{i\theta\gamma_5} \psi. \quad (5.14)$$

В каноническом подходе эти симметрии генерируются токами

$$j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi, \quad (5.15)$$

$$j_\mu^5 = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi. \quad (5.16)$$

Тщательный пертурбативный анализ [3, 17] указывает на невозможность одновременного сохранения этих токов в четырехмерной квантовой теории поля. Мы не будем исследовать эту «аномалию», но заметим, что она тесно связана с трудностями, возникающими в решеточной формулировке при попытке сохранить эти симметрии [15, 38, 108, 146, 147, 158].

Как и в гл. 4, мы рассмотрим четырехмерную гиперкубическую решетку из N^4 узлов. В каждом узле m зададим четырехкомпонентную спинорную переменную ψ_m . Чтобы получить простой вид решеточного действия, определим производную посредством симметричной разности:

$$\partial_\mu \psi \rightarrow \frac{1}{2a} (\psi_{m_\nu + \delta_{\mu\nu}} - \psi_{m_\nu - \delta_{\mu\nu}}). \quad (5.17)$$

Решеточное действие получается суммированием лагранжиана по всем узлам:

$$S = \sum_{m,n} \bar{\psi}_m M_{mn} \psi_n, \quad (5.18)$$

где

$$M_{mn} = \frac{1}{2} a^3 \sum_\mu \gamma_\mu (\delta_{m_\nu + \delta_{\mu\nu}, n_\nu}^4 - \delta_{m_\nu - \delta_{\mu\nu}, n_\nu}^4) + a^4 m \delta_{mn}^4. \quad (5.19)$$

Заметим, что симметрия (5.13), а в случае $m = 0$ и (5.14), остается и на решеточном уровне. Подставим теперь это действие в функциональный интеграл

$$Z_0 = \int [d\psi d\bar{\psi}] e^{-S}. \quad (5.20)$$

В отличие от скалярного случая это не обычный интеграл и требует дальнейшего определения. Рассмотрим сначала такие интегралы для квадратичного действия вида (5.18) с произвольной матрицей M . Позднее мы вернемся к теории (5.19).

Сначала наложим на переменные интегрирования условия антикоммутирования:

$$[\psi_m^\alpha, \psi_n^\beta]_+ = [\psi_m^{\alpha\dagger}, \psi_n^{\beta\dagger}]_+ = [\psi_m^{\alpha\dagger}, \psi_n^{\beta}]_+ = 0, \quad (5.21)$$

где явно выписаны обычно опускаемые спинорные индексы α и β .

Это условие резко отличается от канонических коммутационных соотношений для дираковских операторов в гильбертовом пространстве. В функциональном интеграле (5.20) ψ и ψ^\dagger представляют собой независимые фермионные переменные. Как и в гл. 4, подинтегральное выражение является экспонентой от квадратичной формы. Мы увидим, что интегрирование вновь сводится к нахождению детерминанта матрицы M . Но прежде полезно ввести понятие источников для фермионных полей.

Поскольку наши поля антикоммутируют, связанные с ними источники должны обладать аналогичным свойством. Введем отдельные источники b_m^α и c_m^α для полей ψ_m^α и $\bar{\psi}_m^\alpha$ соответственно. Опуская повторяющиеся узловые и спинорные индексы, мы приведем действие (5.18) к более общему виду

$$S = \bar{\psi} M \psi + b \psi - \bar{\psi} c. \quad (5.22)$$

Примем, что все спинорные величины ψ , $\bar{\psi}$, b и c антикоммутируют друг с другом и с собой. Мы хотим определить фермионный функциональный интеграл таким образом, чтобы линейные члены с источниками можно было исключить, выделяя полный квадрат и сдвигая переменные интегрирования по аналогии с обычным интегралом. Другими словами, мы потребуем выполнения равенства

$$Z = Z_0 \exp(-b M^{-1} c), \quad (5.23)$$

где Z_0 — функциональный интеграл (5.20) без источников. Для рассматриваемого здесь случая свободного поля общий множитель Z_0 не существует для вычисления функций Грина. В частности, фермионный пропагатор, как и для скалярных полей, получается обращением кинетической матрицы M . Однако в более общем случае, например при учете калибровочных полей, матрица M может зависеть от других взаимодействующих полей. В этом случае необходимо знать явный вид функциональной зависимости Z_0 от M . Покажем теперь, что Z_0 есть не что иное, как детерминант M [133].

Для этого мы должны уметь дифференцировать по фермионным источникам. Соответствующие производные должны удовлетворять соотношению

$$\left[\frac{d}{db_m^\alpha}, b_n^\beta \right]_+ = \delta_{mn} \delta^{\alpha\beta}. \quad (5.24)$$

и такому же соотношению для c_m^α . Условие (5.24) обобщает обычное дифференцирование на случай коммутаторов. Заметим, что эти антикоммутационные соотношения в точности те же, что и для

операторов рождения и уничтожения фермионов в узлах решетки:

$$[b_m^{\alpha\dagger}, b_n^{\beta}]_+ = \delta_{mn} \delta^{\alpha\beta}. \quad (5.25)$$

Мы можем реализовать эти соотношения в фокковском пространстве состояний, генерируемых действием операторов

$$\frac{d}{db_m^{\alpha}} \leftrightarrow b_m^{\alpha\dagger} \quad (5.26)$$

на «вакуум», удовлетворяющий условию

$$b_m^{\alpha}|0\rangle = c_m^{\alpha}|0\rangle = 0. \quad (5.27)$$

Действие на этот вакуум эквивалентно выключению источников. Этот «евклидов вакуум» не следует смешивать с элементом гильбертова пространства состояний в пространстве Минковского, введенного при рассмотрении формализма матрицы переноса в гл. 3. Здесь мы пользуемся обозначениями операторов рождения для удобства и чтобы обойти затруднения, связанные с использованием операции d/db , которая не является дифференцированием в общепринятом смысле.

Наш функциональный интеграл с источниками можно рассматривать как оператор в указанном пространстве. Действуя на вакуум справа, мы определяем состояние

$$(Z| = (0| Z(b, c). \quad (5.28)$$

Фермионные функции Грина являются матричными элементами от произведения операторов рождения между этим состоянием и вакуумом:

$$\int [d\psi d\bar{\psi}] e^{-S} \bar{\psi}_{i_1} \dots \bar{\psi}_{i_n} \psi_{j_1} \dots \psi_{j_n} = (Z| c_{i_1}^{\dagger} \dots c_{i_n}^{\dagger} b_{j_1}^{\dagger} \dots b_{j_n}^{\dagger} |0). \quad (5.29)$$

Операторы рождения соответствуют концам внешних линий у корреляционных функций общего вида.

Следуя далее к нашей цели — вычислению Z_0 , представим теперь одно весьма полезное тождество, содержащее экспоненты от квадратичных форм операторов рождения и уничтожения. Пусть F и G — симметричные матрицы размера $N^4 \times N^4$. Рассмотрим выражение

$$(\psi(\lambda)| = (0| e^{bFc} e^{\lambda b^{\dagger} G c^{\dagger}}, \quad (5.30)$$

в котором будем перемещать все операторы рождения налево до тех пор, пока не останется единственная экспонента, содержащая

квадратичную форму лишь от операторов уничтожения. Оставляя читателю возможность самому проделать соответствующие простые преобразования, выпишем результирующие тождества

$$(\psi(\lambda) | b^\dagger = -(\psi(\lambda) | (F^{-1} - \lambda G)^{-1} c, \quad (5.31)$$

$$(\psi(\lambda) | c^\dagger = +(\psi(\lambda) | (F^{-1} - \lambda G)^{-1} b. \quad (5.32)$$

Беря производную по λ от обеих частей (5.30) и используя эти тождества, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\lambda}(\psi | = (\psi | [-\text{Tr}(G(F^{-1} - \lambda G)^{-1}) + b(F^{-1} - \lambda G)^{-1} G(F^{-1} - \lambda G)^{-1} c]. \quad (5.33)$$

С учетом начального условия

$$(\psi(\lambda = 0) | = (0 | e^{bFc} \quad (5.34)$$

мы можем проинтегрировать уравнение (5.33) и получить формулу

$$(\psi | = | I - \lambda FG | (0 | \exp(b(F^{-1} - \lambda G)^{-1} c). \quad (5.35)$$

Если воспользоваться хорошо известным тождеством

$$|F| = \exp[\text{Tr}(\ln F)], \quad (5.36)$$

нетрудно убедиться, что это действительно решение уравнения (5.33). Имея уравнение (5.33), вернемся к нашему функциональному интегралу и перепишем матрицу M в виде

$$M = I + (M - I), \quad (5.37)$$

где I — единичная матрица. Рассматривая $M - I$ как возмущение, получаем

$$(Z | = (0 | \int [d\psi d\bar{\psi}] e^{-\bar{\psi}\psi - b\psi + \bar{\psi}c} \exp(c^\dagger(I - M)b^\dagger). \quad (5.38)$$

Как и выше, можно выполнить преобразование к полному квадрату; однако в данном случае нормировка является полностью произвольной. Определим меру интегрирования так, чтобы выполнялось равенство

$$\int [d\psi d\bar{\psi}] e^{-\bar{\psi}\psi} = 1. \quad (5.39)$$

Тогда получим

$$(Z | = (0 | e^{-bc} e^{-b^\dagger(I-M)c^\dagger}. \quad (5.40)$$

Это равенство имеет в точности форму (5.30), поэтому формула (5.35) дает окончательный результат

$$(Z| = |M|(0|e^{-bM^{-1}c}. \quad (5.41)$$

Отбрасывая источники, мы видим, что Z_0 равно детерминанту M :

$$|M| = \int [d\psi d\bar{\psi}] e^{-\bar{\psi}M\psi}. \quad (5.42)$$

Отметим схожесть этого результата с бозонным случаем в (4.22). За счет антикоммутирования фермионных полей детерминант переходит из знаменателя в числитель. Для скалярных полей можно также развить операторный формализм, аналогичный представленному здесь. Мы оставляем читателю возможность самому вывести бозонный аналог уравнения (5.35).

В этом анализе мы не рассматривали явный вид кинетической матрицы M , а исходили лишь из квадратичной природы фермионного действия. Вернемся теперь к выражению (5.19) и исследуем пропагатор

$$S_{mn} = Z_0^{-1} \int [d\psi d\bar{\psi}] e^{-\bar{\psi}M\psi} \psi_m \bar{\psi}_n. \quad (5.43)$$

Исходя из нашего операторного формализма, получаем

$$S_{mn} = Z_0^{-1} (Z|b_m^\dagger c_n^\dagger|0) = (M^{-1})_{mn}. \quad (5.44)$$

Как и в гл. 4, матрица M диагонализуеться и обращается с помощью преобразования Фурье. Это дает формулу

$$(M^{-1})_{mn} = a^{-4} N^{-4} \sum_k \tilde{M}_k^{-1} e^{2\pi i k \cdot (m-n)/N}, \quad (5.45)$$

где

$$\tilde{M}_k = m + ia^{-1} \sum_\mu \gamma_\mu \sin(2\pi k/N). \quad (5.46)$$

Вновь, как и в гл. 4, перейдем к большой решетке и заменим суммы по k интегралами:

$$q_\mu = 2\pi k_\mu / (Na), \quad (5.47)$$

$$a^{-4} N^{-4} \sum_k \rightarrow \int d^4 q / (2\pi)^4, \quad (5.48)$$

$$\tilde{M}_k = m + ia^{-1} \sum_\mu \gamma_\mu \sin(aq_\mu). \quad (5.49)$$

Если теперь рассматривать малый шаг решетки и разложить (5.49) по степеням a , то получим

$$\tilde{M}_k = m + i\not{q} + O(a^2). \quad (5.50)$$

Таким образом, мы приходим к обычному фермионному пропагатору непрерывной теории. К сожалению, необходим еще более тщательный анализ на верхнем пределе импульсных интегралов. Когда q_μ равно π/a , синус в (5.49) обращается в нуль. При этом членами $O(a^2)$ пренебрегать нельзя. В самом деле, в пропагаторе не происходит подавления импульсов, значения которых находятся вблизи π/a . Поэтому следует ожидать быстрого изменения полей при переходе от данного узла к соседнему. Такая ситуация препятствует простому переходу к непрерывному пределу вида (5.50) и служит преградой любой попытке ввести матрицу переноса по схеме, изложенной в гл. 3.

Для того чтобы изолировать область больших импульсов, рассмотрим одну из компонент q_μ и перейдем к новой переменной

$$\tilde{q}_\mu = q_\mu - \pi/a, \quad (5.51)$$

на половине области интегрирования:

$$\int_{-\pi/a}^{\pi/a} dq_\mu \tilde{M}_k^{-1} = \int_{-\pi/2a}^{\pi/2a} (dq_\mu + d\tilde{q}_\mu) \tilde{M}_k^{-1}. \quad (5.52)$$

Для малого шага решетки в каждом из слагаемых правой части (5.52) доминирует конечная область интегрирования. Теперь уже справедливо приближение (5.50). Но при этом для каждой пространственно-временной оси имеются две независимые области, где в непрерывном пределе возникает свободный фермионный пропагатор. Следовательно, мы имеем в действительности $2^4 = 16$ независимых сортов фермионов, хотя сначала казалось, что в теории должен быть только один сорт.

Это размножение фермионного спектра происходит из-за того, что мы используем схему регуляризации, которая при $m = 0$ сохраняет точную γ_5 -инвариантность на всех этапах расчета. Поэтому она не может обладать известной киральной аномалией. Дополнительные сорта фермионов, возникающие в теории, приводят к сокращению аномалии. Заметим, что новым фермионам соответствуют другие γ -матрицы, поскольку при сдвиге (5.51) синус меняет знак:

$$\gamma_\mu \sin(q_\mu a) = -\gamma_\mu \sin(\tilde{q}_\mu a). \quad (5.53)$$

Этот знак минус устраняется переопределением соответствующей γ_μ , а следовательно, и γ_5 . Те фермионы, которые соответствуют нечетному числу компонент q , сдвинутых на π/a , преобразуются под действием кирального преобразования (5.14) как сопряженные спиноры. Поэтому мы получаем одинаковое число состояний каждой киральности.

Существуют несколько подходов к решению указанной проблемы «удвоения» числа фермионов. Вероятно, проще всего игнорировать эту проблему и сказать, что теория автоматически генерирует большое число фермионных «ароматов». Действительно, имеются ведь несколько различных типов реальных кварков. Тем не менее использование решеточного артефакта для объяснения этого вырождения представляется несколько искусственным.

Заметив, что проблема обусловлена большими значениями q , можно попытаться искусственным образом исключить большие компоненты импульса. В общем случае это противоречит полноте преобразования Фурье. Однако наличие спинорного индекса позволяет частично решить данную проблему. Помещая в каждый узел только одну спинорную компоненту и размещая различные компоненты на разных группах узлов, можно тем самым разместить отдельные компоненты на меньших подрешетках. Это ослабляет воздействие верхнего предела импульсных интегралов и частично снимает нежелательное вырождение. Такой подход с успехом был применен в рамках гамильтоновой формулировки решеточной теории, где непрерывное время уже устраняет половину нежелательных состояний [8, 115].

Проблема размножения фермионных состояний является следствием периодической природы синуса, возникающего при фурье-преобразовании несимметричной конечно-разностной формы решеточной производной¹⁾. В непрерывной теории в пространстве Фурье дифференцирование сводится к умножению на импульс. Поэтому еще одно решение проблемы решеточного вырождения состоит в замене синуса от импульса самим импульсом. Такая операция определяет новый тип решеточной производной, который немедленно устраняет все дополнительные состояния. В координатном пространстве новая производная выражается не только через соседние узловые переменные, но включает также их произведение для узлов, находящихся друг от друга на произвольном расстоянии. При этом киральная симметрия сохраняется, а выявление аномалий

¹⁾ См. примечание на стр. 17. — *Прим. ред.*

требует тщательного и несколько непоследовательного анализа пределов интегрирования [64, 106].

Прагматический подход к проблеме вырождения состоит в добавлении к действию новых членов в непрерывном пределе, подавляющих дополнительные состояния. Чтобы сохранить локальный характер действия, новые члены должны зависеть лишь от соседних пар узлов решетки. В импульсном пространстве этому соответствуют простые тригонометрические функции импульса. С учетом такого добавления \tilde{M}_k принимает вид

$$\tilde{M}_k = m + ia^{-1} \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \sin(aq_{\mu}) + ra^{-1} \sum_{\mu} (1 - \cos(aq_{\mu})), \quad (5.54)$$

где r — произвольный параметр. Заметим, что при малых значениях импульса величина нового члена порядка шага решетки, и им можно пренебречь. Однако при значении одной из компонент импульса, близком к π/a , соответствующее дополнительное состояние получает добавку к массе $2r/a$. В непрерывном пределе все такие дополнительные фермионы приобретают бесконечную массу и, таким образом, остается только один сорт фермионов, имеющий массу m . Полагая параметр r равным единице [181], получаем следующее выражение в координатном пространстве:

$$M_{mn} = (a^4 m + 4a^3) \delta_{mn}^4 + \frac{1}{2} a^3 \sum_{\mu} [(1 + \gamma_{\mu}) \delta_{m_{\nu} + \delta_{\mu\nu}, n_{\nu}} + (1 - \gamma_{\mu}) \delta_{m_{\nu} - \delta_{\mu\nu}, n_{\nu}}]. \quad (5.55)$$

При перемещении кварка из данного узла в соседний его волновая функция умножается на $(1 \pm \gamma_{\mu})$, а не на γ_{μ} , как в (5.19). Заметим, что $(1 \pm \gamma_{\mu})/2$ является проекционным оператором ранга 2:

$$(\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_{\mu}))^2 = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_{\mu}), \quad (5.56)$$

$$\text{Tr}(\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_{\mu})) = 2. \quad (5.57)$$

Это предотвращает распространение части спинорного поля, уменьшая тем самым в два раза вырождение по каждому измерению; иначе говоря, устраняет все дополнительные состояния. Данный подход известен как вильсоновская техника проекционного оператора.

Простота этого метода является большим удобством при расчетах. Но при этом полностью нарушается киральная симметрия, поскольку добавляемая часть подобна массовому члену для нежелательных фермионов. По-видимому, в таком сильном нарушении нет необходимости: ведь в случае нескольких кварковых ароматов

не все токи имеют аномалию. Прямые следствия симметрии, такие, как наличие голдстоуновских бозонов, в рамках вильсоновского подхода проявляются лишь в непрерывном пределе. Пока неясно, в какой мере эти скрытые симметрии могут сохраняться в решеточной теории.

Упражнения

1. Получите аналог решения (5.35) для бозонных операторов.
2. Для единственной пары фермионных переменных ψ и $\bar{\psi}$ докажите справедливость формул

$$\begin{aligned}\int d\psi d\bar{\psi} 1 &= \int d\psi d\bar{\psi} \psi = \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} \bar{\psi} = 0, \\ \int d\psi d\bar{\psi} \psi \bar{\psi} &= 1.\end{aligned}$$

3. Проведите масштабное преобразование полей, чтобы получить выражение (5.55) в виде

$$M_{mn} = \delta_{mn}^4 + K \sum_{\mu} ((1 + \gamma_{\mu}) \delta_{m_{\nu} + \delta_{\mu\nu}, n_{\nu}}^4 + (1 - \gamma_{\mu}) \delta_{m_{\nu} - \delta_{\mu\nu}, n_{\nu}}^4),$$

где «хopping-параметр» K в непрерывном пределе стремится к $1/8$. Это соответствует критической точке, в которой корреляционная длина, выраженная в единицах шага решетки, расходится.

4. Мы рассмотрели периодические граничные условия. Имеет ли смысл изучать антипериодические граничные условия для фермионных полей? (Указание. Исследуйте вопрос о знаке выражения (3.32), обусловленном фермионной петлей, замыкающейся за счет граничных условий.)

Что такое калибровочная теория? Число различных ответов на этот вопрос может превысить число людей, занимающихся физикой. В данной главе мы коснемся лишь некоторых общих определений калибровочной теории, и в частности неабелевой теории.

В самых общих чертах неабелеву калибровочную теорию можно рассматривать как электромагнетизм, «украшенный» внутренней симметрией. Электромагнитные поля описываются компонентами антисимметрического тензора, представляющего собой четырехмерный ротор векторного потенциала:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (6.1)$$

Янг и Миллс [184] предложили добавить изоспиновый индекс к A_μ и $F_{\mu\nu}$:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^\alpha, \quad (6.2)$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}^\alpha. \quad (6.3)$$

Это тривиальное обобщение перестает быть тривиальным при добавлении к $F_{\mu\nu}$ еще одной антисимметрической части:

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + g_0 f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma. \quad (6.4)$$

Здесь g_0 — голая калибровочная константа связи, а $f^{\alpha\beta\gamma}$ — структурные константы некоторой непрерывной группы G .

Мы рассматриваем здесь только унитарные группы. Элемент g группы G будем считать матрицей в фундаментальном или определяющем представлении. Параметризуем элементы группы G , используя набор ее генераторов

$$g = e^{i\omega^\alpha \lambda^\alpha}, \quad (6.5)$$

где ω^α — параметры, а λ^α — эрмитовы матрицы, являющиеся генераторами группы. Структурные константы определяются из коммутационных соотношений

$$[\lambda^\alpha, \lambda^\beta] = i f^{\alpha\beta\gamma} \lambda^\gamma. \quad (6.6)$$

Удобно использовать ортонормированные генераторы

$$\text{Tr}(\lambda^\alpha \lambda^\beta) = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta}. \quad (6.7)$$

Простейшая неабелева теория описывается группой $SU(2)$, генераторами которой являются матрицы Паули (5.10)—(5.12):

$$\lambda^\alpha = \frac{1}{2}\sigma^\alpha, \quad (6.8)$$

$$f^{\alpha\beta\gamma} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma}. \quad (6.9)$$

Уравнения Максвелла для электродинамики вытекают из лагранжиановой плотности вида

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + j_\mu A_\mu. \quad (6.10)$$

В этом выражении j_μ — внешний источник для электромагнитного поля. Неабелева калибровочная теория определяется аналогичным лагранжианом, но содержащим дополнительно суммирование по изоспиновому индексу в каждом слагаемом формулы (6.10) и с $F_{\mu\nu}$, даваемым выражением (6.4). Классические уравнения движения для электромагнитного поля

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = j_\nu \quad (6.11)$$

в случае неабелевой теории принимают вид

$$(D_\mu F_{\mu\nu})^\alpha = j_\nu^\alpha, \quad (6.12)$$

где «ковариантная производная» определяется как

$$(D_\mu F_{\mu\nu})^\alpha = \partial_\mu F_{\mu\nu}^\alpha + g_0 f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta F_{\mu\nu}^\gamma. \quad (6.13)$$

Смысл такого определения станет понятен после рассмотрения калибровочных преобразований. Антисимметричность $F_{\mu\nu}$ означает, что источник должен удовлетворять условию

$$(D_\mu j_\mu)^\alpha = 0. \quad (6.14)$$

Это равенство является неабелевым аналогом условия сохранения тока.

Удобно ввести определение матричного потенциала с помощью свертки с генераторами группы

$$A_\mu = A_\mu^\alpha \lambda^\alpha. \quad (6.15)$$

Обратное соотношение с учетом (6.7) имеет вид

$$A_\mu^\alpha = 2 \operatorname{Tr}(\lambda^\alpha A_\mu). \quad (6.16)$$

Аналогичным образом вводятся матричные обозначения для $F_{\mu\nu}$ и j_μ . Выражение для $F_{\mu\nu}$ через A_μ имеет простой вид

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig_0 [A_\mu, A_\nu]. \quad (6.17)$$

В этих обозначениях плотность лагранжиана равна

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + 2 \text{Tr} (j_\mu A_\mu). \quad (6.18)$$

Перейдем теперь ко второму и пожалуй наиболее популярному определению калибровочной теории, как системы, обладающей локальной симметрией. Преобразование полей в локальной области пространства-времени может не менять действия. Для электромагнитного поля таким свойством обладает обычное калибровочное преобразование

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad (6.19)$$

где калибровочная функция Λ является произвольной функцией пространственно-временных координат. В неабелевом случае калибровочное преобразование задается отображением пространства в калибровочную группу. С каждой пространственно-временной точкой свяжем элемент группы $g(x)$. В матричных обозначениях соответствующее преобразование A_μ имеет вид

$$A_\mu \rightarrow g^{-1} A_\mu g + (i/g_0) g^{-1} \partial_\mu g. \quad (6.20)$$

Электродинамическое преобразование (6.19) является частным случаем (6.20), когда $g(x)$ является простым фазовым множителем:

$$g(x) = e^{-i g_0 \Lambda(x)}. \quad (6.21)$$

Следовательно, электромагнетизм можно рассматривать как $U(1)$ -калибровочную теорию. Под действием преобразования (6.20) $F_{\mu\nu}$ преобразуется особенно простым образом:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow g^{-1} F_{\mu\nu} g. \quad (6.22)$$

Ковариантную производную (6.13) можно обобщить на случай полей, преобразующихся по некоторому представлению калибровочной группы. Пусть преобразование поля ϕ_i имеет вид

$$\phi_i \rightarrow R_{ij}(g) \phi_j. \quad (6.23)$$

Матрицы R_{ij} образуют представление группы g , т. е.

$$R_{ij}(g) R_{jk}(g') = R_{ik}(gg'). \quad (6.24)$$

Например, само поле $F_{\mu\nu}^\alpha$ преобразуется по присоединенному представлению

$$F_{\mu\nu}^\alpha \rightarrow R^{\alpha\beta}(g) F_{\mu\nu}^\beta, \quad (6.25)$$

где

$$g^{-1} \lambda^\alpha g = R^{\alpha\beta}(g) \lambda^\beta. \quad (6.26)$$

Обозначим через v_{ij}^α генераторы представления R , так что

$$R_{ij}(e^{i\omega^\alpha \lambda^\alpha}) = (e^{i\omega^\alpha v^\alpha})_{ij}. \quad (6.27)$$

Эти генераторы также удовлетворяют соотношениям (6.6), т. е.

$$[v^\alpha, v^\beta] = i f^{\alpha\beta\gamma} v^\gamma. \quad (6.28)$$

Определим теперь ковариантную производную поля ϕ_i :

$$(D_\mu \phi)_i = \partial_\mu \phi_i + i g_0 A_\mu^\alpha v_{ij}^\alpha \phi_j. \quad (6.29)$$

Основанием для такого определения является следующее простое свойство калибровочного преобразования:

$$(D_\mu \phi)_i \rightarrow R_{ij}(g) (D_\mu \phi)_j. \quad (6.30)$$

Заметим, что условие ковариантности уравнения движения (6.12) требует, чтобы источник преобразовывался по присоединенному представлению

$$j_\mu^\alpha \rightarrow R^{\alpha\beta}(g) j_\mu^\beta, \quad (6.31)$$

или в матричной форме

$$j_\mu \rightarrow g^{-1} j_\mu g. \quad (6.32)$$

Обратимся теперь к третьему определению калибровочной теории, опирающемуся на понятие фазы. Мандельстам [130] и Янг [183] подчеркивали тот факт, что взаимодействие частицы с калибровочным полем описывается фазовым множителем, связанным с любой возможной мировой линией, которую частица может пересечь. В случае неабелевой теории эти зависящие от пути фазовые множители являются групповыми матрицами. В случае пересечения заряженной частицей некоторого пространственно-временного контура ее волновая функция приобретает фазовый множитель, обусловленный электромагнитным взаимодействием:

$$\psi \rightarrow \psi \exp \left(i g_0 \int_P A_\mu dx_\mu \right) \doteq U(P) \psi, \quad (6.33)$$

где интеграл берется вдоль указанного контура. В случае покоящейся частицы этот множитель имеет особенно простой вид

$$U(P) = \exp(i g_0 A_0 t), \quad (6.34)$$

где t — протяженность контура во временном направлении. Заряженная частица приобретает дополнительные временные осцилляции, частота которых пропорциональна ее заряду и величине

скалярного потенциала. Следовательно, энергия частицы возрастает на величину $g_0 A_0$. Выражение (6.33) обобщает эту картину на случай произвольной лоренцевой системы отсчета.

В неабелевой теории элемент калибровочной группы мы сопоставляем произвольному контуру в пространстве-времени. Рассмотрим некоторый контур

$$x_\mu(s), \quad s \in [0, 1], \quad (6.35)$$

где s дает параметризацию точек на контуре. Сопоставим части контура от $x_\mu(0)$ до $x_\mu(s)$ элемент группы, определяемый дифференциальным уравнением:

$$\frac{d}{ds} U(s) = \frac{dx_\mu}{ds} ig_0 A_\mu U(s). \quad (6.36)$$

В качестве начального условия выберем

$$U(0) = 1. \quad (6.37)$$

В уравнение (6.36) входит матрица A_μ , определенная в (6.15). Формальное решение уравнения (6.36) имеет вид

$$U(s) = \text{P.O.} \left(\exp \left(ig_0 \int_0^s ds \frac{dx_\mu}{ds} A_\mu \right) \right), \quad (6.38)$$

где P.O. означает упорядочение вдоль контура некоммутирующих матриц A_μ . Это значит, что при разложении экспоненты в ряд, матрицы должны перемножаться в том порядке, который соответствует направлению контура, причем матрицы, соответствующие большему значению параметра s , должны располагаться слева. Матрица $U(s)$ принадлежит калибровочной группе, так как она является произведением групповых элементов, связанных с инфинитезимальными элементами контура.

Упорядоченная вдоль контура экспонента в (6.38) чувствует локальные калибровочные преобразования (6.20) лишь на верхнем и нижнем пределах интегрирования:

$$U(s) \rightarrow g^{-1}(x_\mu(s)) U(s) g(x_\mu(0)). \quad (6.39)$$

Рассмотрим случай замкнутого контура C . След элемента группы, соответствующего такому контуру,

$$W(C) = \text{Tr}(U(C)) \quad (6.40)$$

не зависит от выбора начальной точки на контуре и является калибровочно-инвариантным. Он называется оператором вильсоновской петли и играет ключевую роль в последующих главах. В

его определении (6.40) вместо операции взятия следа можно рассматривать характер выбранного представления калибровочной группы; однако ниже, за исключением специально оговоренных случаев, мы будем иметь дело только с фундаментальным представлением.

Завершая эту главу, упомянем кратко еще одно определение калибровочной теории. В рамках канонического гамильтонова подхода взаимодействие элементарных частиц предпочтительно описывать посредством локальных полевых операторов. Более того, учет лоренц-инвариантности наиболее прост при однородном преобразовании полевых операторов под действием группы Лоренца. Для калибровочного поля это оказывается невозможным [172]. Гамильтониан взаимодействия с калибровочным полем обязательно содержит векторный потенциал A_μ . В общем случае под действием преобразования Лоренца происходит изменение калибровки, т. е. A_μ преобразуется неоднородно. Выбор ковариантной калибровки, например, такой, как $\partial_\mu A_\mu = 0$, позволяет обойти эту проблему, но лишь ценой введения индефинитной метрики в квантовомеханическом пространстве.

Тот факт, что локальные взаимодействия требуют введения потенциалов, был убедительно продемонстрирован в эксперименте Ааронова—Бома [4]. Другая особенность калибровочных теорий состоит в весьма своеобразном подсчете числа степеней свободы квантов калибровочного поля. В электродинамике векторный потенциал A_μ имеет четыре компоненты, хотя у фотона имеется только две физические поляризации. Продольная компонента A_μ является нефизической, поскольку зависит от выбора калибровки. Другая лишняя степень свободы может быть устранена, поскольку временная компонента A_0 не является динамической переменной. Это означает, что уравнения движения не содержат временной производной A_0 , и она оказывается функцией других переменных. Но в общем случае исключение A_0 приводит к нелокальным объектам. Именно с этим обстоятельством связана предложенная Мандельштамом [130] нелокальная формулировка калибровочной теории, не использующая потенциалы и опирающаяся на рассмотренные выше интегралы, упорядоченные вдоль контура.

Решеточная формулировка с самого начала нарушает лоренц-инвариантность. Поэтому последнее определение калибровочной теории не очень подходит для решеточного подхода. Решетка благоприятствует существованию нефизических степеней свободы. Мы проанализируем их при обсуждении гамильтоновой формулировки решеточной калибровочной теории.

Упражнения

1. Покажите, что структурные константы $f^{\alpha\beta\gamma}$, введенные в соотношения (6.6), являются полностью антисимметричными.
2. Убедитесь в справедливости калибровочного преобразования (6.39).
3. Каковы генераторы v^α присоединенного представления, заданного уравнением (6.26)?
4. Вычислите прямоугольную вильсоновскую петлю для теории поля, описывающей невзаимодействующие фотоны. Используя подходящую регуляризацию, установите зависимость лидирующей расходимости от периметра петли. Покажите, что отношение двух петель с одним и тем же периметром и числом углов остается конечным при снятии регуляризации.

Калибровочная теория на решетке

В этой главе мы опишем изящную формулировку калибровочных полей на пространственно-временной решетке, данную Вильсоном [179]. Идея его подхода основана на представлении калибровочного поля как зависящего от пути фазового множителя. Полевыми переменными являются элементы калибровочной группы, сопоставляемые ребрам решетки, т. е. прямолинейным отрезкам пространства-времени, связывающим соседние узлы. Элемент группы, сопоставляемый произвольному решеточному контуру, соединяющему последовательность соседних узлов, равен произведению реберных групповых элементов. Данная формулировка замечательна тем, что сохраняет требование локальной калибровочной инвариантности.

Рассматривая общую калибровочную группу G , припишем каждой паре соседних узлов решетки (i, j) независимый элемент группы G :

$$U_{ij} \in G. \quad (7.1)$$

Индексы i и j нумеруют узлы решетки, расположенные на концах ребра, на котором определена величина U_{ij} . Мы не будем явно выписывать матричные индексы групповых матриц U_{ij} . Ребру с противоположным направлением следует приписать обратную матрицу:

$$U_{ji} = (U_{ij})^{-1}. \quad (7.2)$$

Векторный потенциал можно ввести, представив U_{ij} в виде

$$U_{ij} = e^{ig_0 A_\mu a}, \quad (7.3)$$

где a — шаг решетки, а лоренцев индекс μ соответствует направлению ребра (i, j) . Мы воспользовались матричным обозначением для A_μ , являющегося элементом алгебры Ли калибровочной группы G . Пространственная координата x_μ , т. е. аргумент A_μ , должна быть выбрана в окрестности рассматриваемого ребра решетки. Для удобства возьмем в качестве x_μ середину ребра:

$$x_\mu = \frac{1}{2}a(i_\mu + j_\mu). \quad (7.4)$$

В непрерывном пределе такой выбор не противоречит тому факту, что элемент U_{ij} упорядочен вдоль ребра, согласно (6.38).

Нам необходимо определить действие, описывающее динамику этих полевых переменных. Соответствующий лагранжиан в непрерывном пределе должен переходить в лагранжиан классической теории Янга — Миллса, описанной в предыдущей главе. Прежде всего следует ввести аналог тензора $F_{\mu\nu}$, являющегося обобщением ротора векторного потенциала. Ему соответствуют интегралы от A_μ вдоль небольших замкнутых контуров. Исходя из этого, Вильсон предложил в качестве действия взять сумму по всем элементарным квадратам решетки:

$$S = \sum_{\square} S_{\square}. \quad (7.5)$$

Действие на каждом таком квадрате, или элементарной грани, представляет собой след произведения соответствующих элементов группы

$$S_{\square} = \beta [1 - (1/n) \operatorname{Re} \operatorname{Tr} (U_{ij} U_{jk} U_{kl} U_{li})]. \quad (7.6)$$

Здесь i, j, k и l последовательно нумеруют вершины рассматриваемой грани. Множитель $-1/n$ устанавливает нормировку для групповых матриц размерности $n \times n$. Множитель β мы определим ниже. Аддитивная константа в выражении (7.6) выбрана таким образом, чтобы для единичных групповых элементов действие обращалось в нуль. След в (7.6) может соответствовать любому представлению группы. Мы ограничимся здесь фундаментальным представлением.

Нетрудно убедиться, что действие (7.5), (7.6) в непрерывном пределе приводит к обычной теории Янга — Миллса. Для этой цели сначала следует воспользоваться выражением (7.3) для перехода от U_{ij} к векторному потенциалу. Рассмотрим, например, грань с центром в точке x_μ , ориентированную в плоскости $(\mu, \nu) = (1, 2)$. Выписав выражение (7.6), получим

$$\begin{aligned} S_{\square} = & \beta (1 - (1/n) \operatorname{Re} \operatorname{Tr} (\exp i g_0 A_1(x_\mu - \tfrac{1}{2} a \delta_{\mu 2}) \times \\ & \times \exp i g_0 A_2(x_\mu + \tfrac{1}{2} a \delta_{\mu 1}) \times \\ & \times \exp - i g_0 A_1(x_\mu + \tfrac{1}{2} a \delta_{\mu 2}) \times \\ & \times \exp - i g_0 A_2(x_\mu - \tfrac{1}{2} a \delta_{\mu 1}))). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Будем считать векторный потенциал гладкой функцией и разложим его в ряд Тейлора в окрестности точки x . После простых преобразований, которые читатель может выполнить сам, найдем

$$S_{\square} = \beta (1 - (1/n) \operatorname{Re} \operatorname{Tr} \exp (i g_0 a^2 F_{12} + O(a^4))). \quad (7.8)$$

Здесь F_{12} — антисимметричный полевой тензор, содержащий нелинейные по A слагаемые, возникающие от преобразования упорядоченных экспонент в выражении (7.7). Разлагая экспоненту в (7.8), получаем

$$S_{\square} = (\beta g_0^2 / (2n)) a^4 \text{Tr}(F_{12}^2) + O(a^6). \quad (7.9)$$

Мы рассматриваем здесь только унитарные группы с эрмитовыми генераторами, для которых член порядка a^2 обращается в нуль. Заменим теперь сумму по элементарным граням на пространственно-временной интеграл, что дает

$$S = (\beta g_0^2 / (2n)) \int \frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) d^4x + O(a^6). \quad (7.10)$$

Множитель $1/2$ под интегралом связан с симметрией относительно перестановки индексов μ и ν . Следовательно, мы получим обычное действие калибровочной теории, если отождествим

$$\beta = 2n/g_0^2. \quad (7.11)$$

Слагаемые, соответствующие высшим степеням шага решетки в выражении (7.10), обращаются в нуль в классическом непрерывном пределе. Наличие расходимостей в квантовой теории означает, что эти высшие слагаемые могут привести к конечной перенормировке константы связи.

Теперь мы имеем переменные и лагранжиан. Чтобы перейти к квантовой теории, внесем действие под знак функционального интеграла:

$$Z = \int (dU) e^{-S(U)}. \quad (7.12)$$

В этой формуле интегрирование производится по всем возможным значениям калибровочных переменных. Поскольку они являются элементами компактной группы, естественно использовать инвариантную меру интегрирования. В следующей гл. 8 подробно исследуются свойства этой меры.

Выражение (7.12) определяет статистическую сумму для статистической модели, рассматриваемой в данной книге. Корреляционные функции получаются из (7.12) с помощью усреднения в соответствии со сказанным в предыдущих главах. Пусть H — некоторая функция полевых переменных U ; тогда соответствующее среднее определяется выражением

$$\langle H \rangle = Z^{-1} \int (dU) H(U) e^{-S(U)}. \quad (7.13)$$

В квантовомеханическом гильбертовом пространстве этому выражению соответствует вакуумное среднее от упорядоченного по времени оператора, определяемого функцией $H(U)$.

Заметим, что мы не фиксировали калибровку в функциональном интеграле. В непрерывном случае такая фиксация необходима для устранения расходимостей, возникающих из-за интегрирования по всем возможным калибровкам. Но в решеточном подходе все переменные интегрирования являются элементами компактной группы. Как следствие этого калибровочные орбиты сами по себе также компактны. Поэтому интегрирование по всем возможным калибровкам не влияет на калибровочно-инвариантные наблюдаемые. Но нам придется использовать фиксацию калибровки при анализе теории возмущений или работе с матрицей переноса в связи с переходом к гамильтонову формализму. Эти вопросы мы рассмотрим в последующих главах.

До сих пор мы рассматривали чисто калибровочные поля. Учет кварковых степеней свободы сводится просто к добавлению фермионного действия гл. 5 и внесения множителей U_{ij} в слагаемые этого действия, описывающие переход кварка из узла i в узел j . Кварковые поля имеют дополнительные индексы, связанные с внутренней симметрией. Мы не будем явно выписывать этот индекс, но отметим, что U_{ij} действуют на него как матрицы. Воспользуемся вильсоновским методом проекционных операторов для решения проблемы «удвоения» и, принимая во внимание формулу (4.55), выпишем полное действие для калибровочной теории на решетке, описывающей взаимодействие кварков и глюонов:

$$\begin{aligned}
 S = & \beta \sum_{\square} (1 - (1/n) \operatorname{Re} \operatorname{Tr} U_{\square}) + \\
 & + \frac{1}{2} i a^3 \sum_{\{i, j\}} \bar{\psi}_i (1 + \gamma_{\mu} e_{\mu}) U_{ij} \psi_j + \\
 & + (a^4 m_0 + 4a^3) \sum_i \bar{\psi}_i \psi_i.
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Здесь использованы следующие компактные обозначения. Во-первых, U_{\square} обозначает произведение групповых элементов соответствующей элементарной грани. Во-вторых, сумма по $\{i, j\}$ пробегает все пары соседних узлов, причем каждое ребро с данным направлением входит в эту сумму только один раз. Наконец, e_{μ} — единичный вектор, направленный из узла i в узел j . Индекс нуль у массы означает, что это голая масса, которую в непрерывном пределе необходимо перенормировать из-за взаимодействия.

Аналогичным образом можно ввести в теорию другие поля материи, например скалярные частицы. Поскольку они, по-видимому, не играют заметной роли в физике сильных взаимодействий, мы коснемся их лишь кратко в гл. 9, где укажем на некоторые особенности хиггсовского механизма генерации масс калибровочных бозонов.

На кинематическом уровне построенная так решеточная теория переходит в непрерывном пределе в теорию Янга — Миллса. Однако даже до перехода к такому пределу решеточная модель отражает в себе многие реалистические свойства калибровочной теории. Например, она позволяет работать непосредственно с фазами. Более того, локальная калибровочная симметрия сохраняется точно. А именно, если сопоставить каждому узлу решетки произвольный элемент группы g_i , то действие остается инвариантным относительно замены

$$\begin{aligned} U_{ij} &\rightarrow g_i U_{ij} g_j^{-1}, \\ \psi_i &\rightarrow g_i \psi_i, \\ \bar{\psi}_i &\rightarrow \bar{\psi}_i g_i^{-1}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Лишь определение калибровочной теории, основанное на лоренц-инвариантности, не соответствует решеточной формулировке, поскольку последняя нарушает пространственно-временную симметрию.

Сохранение калибровочной инвариантности, вообще говоря, не является обязательным требованием к процедуре регуляризации. В самом деле, физика, описываемая перенормируемой теорией, не должна зависеть от деталей этой процедуры. Тем не менее изящная вильсоновская формулировка с ее точным сохранением калибровочной симметрии сильно упрощает исследование конфайнмента в режиме сильной связи и почти повсеместно принята в решеточных исследованиях.

Упражнения

1. Прodelайте все промежуточные выкладки при переходе от (7.7) к (7.10).
2. Рассмотрите взятие следа в уравнении (7.8) не в фундаментальном, а в присоединенном представлении. Как изменится соотношение (7.11)?
3. Покажите, что фермионная часть выражения (7.14) имеет правильный непрерывный предел.

Использованная Вильсоном при формулировке решеточной калибровочной теории инвариантная мера интегрирования придает этой теории оттенок математического изящества. Такой выбор меры существенно упрощает введение калибровочной инвариантности в регуляризованную теорию. В данной главе мы дадим обзор некоторых общих свойств инвариантных интегралов по компактным группам Ли. В некоторых простых случаях мы явно выпишем вид меры интегрирования, а затем обсудим структуру интегралов от полиномов по матрицам группы $SU(n)$.

Прежде всего должны выполняться основные свойства любого интеграла

$$\int dg (af(g) + bh(g)) = a \int dg f(g) + b \int dg h(g), \quad (8.1)$$

$$\int dg f(g) > 0, \text{ если } f(g) > 0 \text{ для всех } g. \quad (8.2)$$

Здесь f и h — произвольные функции на группе, а a , b — произвольные комплексные числа. Наложим теперь дополнительное ограничение, потребовав, чтобы мера была левоинвариантной:

$$\int dg f(g) = \int dg f(g'g), \quad (8.3)$$

где g' — произвольный фиксированный элемент группы. В обычном интеграле это соответствует сдвигу переменной интегрирования. Поскольку мы будем рассматривать только компактные группы, мы можем так нормировать меру интегрирования, что

$$\int dg 1 = 1. \quad (8.4)$$

Покажем теперь, что такая мера существует и единственна. Для этого сначала, предполагая, что мера существует, найдем ее явный вид, а затем убедимся в нужных свойствах найденной меры.

Рассмотрим произвольную параметризацию групповых элементов набором групповых параметров α_i , где индекс i пробегает зна-

чения от 1 до n (размерность группового многообразия). Предполагается, что, когда значения параметров f пробегают некоторую область D пространства R^n , соответствующие групповые элементы пробегает один раз по всей группе

$$G = \{g(\alpha) | \alpha \in D\}. \quad (8.5)$$

Групповое умножение описывается функцией $\alpha(\beta, \gamma)$, удовлетворяющей соотношению

$$g(\alpha(\beta, \gamma)) = g(\beta)g(\gamma), \quad (8.6)$$

где α , β и γ содержатся в области D . Найдем весовую функцию $J(\alpha)$, такую, что групповой интеграл равен обычному многократному интегралу:

$$\int dg f(g) = \int d\alpha_1 \dots d\alpha_n J(\alpha) f(g(\alpha)). \quad (8.7)$$

Интеграл в правой части этого равенства берется по области D . Свойство групповой инвариантности принимает вид

$$\int d\beta J(\beta) f(g(\beta)) = \int d\beta J(\beta) f(g(\alpha(\gamma, \beta))), \quad (8.8)$$

где γ параметризует групповой элемент g' в уравнении (8.3). Проведем замену переменных в правой части (8.8) и, перейдя к интегрированию по $\alpha(\gamma, \beta)$, получим равенство

$$\int d\beta J(\beta) f(g(\beta)) = \int d\alpha \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \right\|^{-1} J(\beta) f(g(\alpha)), \quad (8.9)$$

где $\|\partial \alpha / \partial \beta\|$ — якобиан данной замены переменных. Поскольку равенство (8.9) справедливо для произвольной функции f , имеем

$$J(\alpha) = \|\partial \alpha / \partial \beta\|^{-1} J(\beta). \quad (8.10)$$

Выбрав в качестве β параметры единичного элемента группы, которые мы обозначим через e , получим

$$J(\gamma) = K \|\partial \alpha(\gamma, \beta) / \partial \beta\|^{-1} |_{\beta=e}, \quad (8.11)$$

где $K = J(e)$ — нормировочный множитель, определяемый соотношением (8.4). Таким образом, групповая мера есть не что иное, как якобиан. Она описывает сдвиг малого объема группового пространства из области единичного элемента в окрестность любой точки.

Итак, если инвариантная мера существует, то она дается формулой (8.11). Убедимся теперь в справедливости этой формулы. В частности, уравнение (8.10) должно быть справедливо при всех β . Следовательно, нужно показать, что равенство

$$J(\alpha(\gamma, \beta)) = K \|\partial(\alpha(\alpha(\gamma, \beta), \delta))\| / \partial \delta \|_{\delta=e}^{-1} \quad (8.12)$$

эквивалентно

$$\|\partial\alpha(\gamma, \beta)/\partial\beta\| J(\beta) = K \left\| \frac{\partial\alpha(\gamma, \beta)}{\partial\beta} \right\|^{-1} \left\| \frac{\partial\alpha(\beta, \delta)}{\partial\delta} \right\|_{\delta=e}^{-1}. \quad (8.13)$$

Для этой цели воспользуемся свойством ассоциативности

$$\alpha(\alpha(\gamma, \beta), \delta) = \alpha(\gamma, \alpha(\beta, \delta)), \quad (8.14)$$

дифференцирование которого по δ дает

$$\left\| \frac{\partial\alpha(\alpha(\gamma, \beta), \delta)}{\partial\delta} \right\| = \left\| \frac{\partial\alpha(\gamma, \rho)}{\partial\rho} \right\|_{\rho=\alpha(\beta, \delta)} \left\| \frac{\partial\alpha(\beta, \delta)}{\partial\delta} \right\|. \quad (8.15)$$

Выбрав здесь в качестве δ параметры единичного элемента группы, получаем желаемый результат.

Для несингулярной параметризации группы этот анализ доказывает существование и единственность меры и дает для нее формальное выражение. Покажем теперь, что право- и левоинвариантные меры совпадают. Очевидная модификация вышеизложенных аргументов приводит к правоинвариантной мере

$$\int (dg)_r f(g) = \int (dg)_r f(gg'). \quad (8.16)$$

Введем определение

$$\int (dg)' f(g) = \int (dg)_r f(g_0 g g_0^{-1}), \quad (8.17)$$

где g_0 — произвольный фиксированный элемент группы. Эта новая мера удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \int (dg)' f(gg_1) &= \int (dg)_r f(g_0 g g_0^{-1} g_1) = \\ &= \int (dg)_r f(g_0 g g_0^{-1}) = \int (dg)' f(g), \end{aligned} \quad (8.18)$$

где мы воспользовались равенством (8.16). Следовательно, $(dg)'$ также является правоинвариантной мерой. Единственность дает

$(dg)' = (dg)_r$. Но теперь мы можем использовать вновь правоинвариантность меры в (8.17) и получить

$$\int (dg)_r f(g) = \int (dg)_r f(g_0 g g_0^{-1}) = \int (dg)_r f(g_0 g). \quad (8.19)$$

Таким образом, правоинвариантная мера является также и левоинвариантной, и в силу единственности обе меры совпадают. Заметим, что мы неявно использовали компактность группы. Если мера не может быть нормирована условием (8.3), то различные рассмотренные здесь меры могут отличаться постоянным множителем.

Заметим попутно, что

$$\int dg f(g^{-1}) = \int dg f(g). \quad (8.20)$$

Это следует из того факта, что левая часть равенства (8.20) определяет другую инвариантную меру, которая в силу единственности должна совпадать с мерой в правой части. Именно в силу (8.20) в решеточных калибровочных теориях направление ребер не входит в меру интегрирования.

Само по себе существование инвариантной меры дает немного, если закон группового умножения имеет достаточно сложную структуру. В случае матричных групп можно получить более явную формулу для меры, которая следует из определения метрического тензора на группе:

$$M_{ij} = \text{Tr}(g^{-1}(\partial_i g) g^{-1}(\partial_j g)), \quad (8.21)$$

где производные берутся по групповым параметрам α_i :

$$\partial_i g = (\partial/\partial \alpha_i) g(\alpha). \quad (8.22)$$

Для метрики (8.21) инвариантная мера определяется формулой

$$\int dg f(g) = K \int d\alpha |\det(M)|^{\frac{1}{2}} f(g(\alpha)), \quad (8.23)$$

где, как и выше, K — нормировочный множитель. Формула (8.23) является стандартной формулой дифференциальной геометрии.

Дадим теперь несколько простых примеров. Для дискретной группы мера есть просто сумма по всем элементам. Для группы $U(1)$, являющейся калибровочной группой в электродинамике:

$$U(1) = \{e^{i\theta} \mid -\pi < \theta \leq \pi\}, \quad (8.24)$$

мера равна

$$\int dg f(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta f(e^{i\theta}). \quad (8.25)$$

Функции на группе являются периодическими функциями угла θ . Инвариантность относительно группы $U(1)$ есть не что иное, как инвариантность относительно сдвига фазы.

Для группы $SU(2)$ мы можем параметризовать элементы координатами точек поверхности четырехмерной сферы (S_3):

$$SU(2) = \{a_0 + i\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mid a_0^2 + \mathbf{a}^2 = 1\}. \quad (8.26)$$

Матрицы $\boldsymbol{\sigma}$ есть матрицы Паули, использованные в гл. 5 при обсуждении фермионов. Для этой параметризации групповая мера имеет особенно простой вид

$$\int dg f(g) = \pi^{-2} \int d^4 a \delta(a^2 - 1) f(g), \quad (8.27)$$

где мы использовали сокращенное обозначение

$$a^2 = a_0^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}. \quad (8.28)$$

Группа $SU(3)$ рассмотрена в работе [16].

Во многих случаях нет необходимости знать явный вид меры. Например, в расчетах методом Монте-Карло, рассматриваемых ниже, некоторые алгоритмы, отбирая случайно и равномерно элементы группы, автоматически генерируют правильную меру. При аналитических расчетах многие интегралы можно взять, используя лишь свойства симметрии. Например, выражение

$$\int dg R_{\alpha\beta}(g) \quad (8.29)$$

равно нулю, если $R_{\alpha\beta}$ есть нетривиальное неприводимое матричное представление группы. Групповой интеграл отбирает синглетную часть любой функции на группе. В частности, справедливо соотношение

$$\int dg \chi_{R_1}(g) \dots \chi_{R_k}(g) = n_s(R_1 \otimes \dots \otimes R_k), \quad (8.30)$$

где характер $\chi_R(g)$ обозначает след матрицы, соответствующий элементу g в представлении R , а $n_s(R_1 \dots R_k)$ — число раз, которое синглетное представление встречается в прямом произведении R_1, \dots, R_k . Если R и R' неприводимы, то их характеры удовлетворяют условию ортогональности

$$\int dg \chi_R^*(g) \chi_{R'}(g) = \delta_{R, R'}. \quad (8.31)$$

Для $SU(3)$ имеем

$$\int dg (\chi_3(g))^3 = 1. \quad (8.32)$$

В разложение сильной связи входят интегралы от полиномов по элементам группы в фундаментальном представлении. Перейдем к описанию графических правил вычисления таких интегралов для группы $SU(n)$ [46]. Нас интересуют выражения вида

$$I = \int dg g_{i_1 j_1} \dots g_{i_n j_n} g_{k_1 l_1}^{-1} \dots g_{k_m l_m}^{-1}, \quad (8.33)$$

в которых мы явно выписали матричные индексы групповых элементов. Для этих интегралов полезно ввести производящую функцию:

$$W(J, K) = \int dg \exp (\text{Tr} (Jg + Kg^{-1})). \quad (8.34)$$

Здесь J и K — матрицы $n \times n$. Интеграл (8.33) получается дифференцированием производящей функции:

$$I = \left(\frac{\partial}{\partial J_{j_1 i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial K_{l_m k_m}} \right) W(J, K) |_{J=K=0}. \quad (8.35)$$

Инвариантность групповой меры приводит к следующим свойствам симметрии W :

$$W(J, K) = W(K, J) = W(g_0^{-1} J g_1, g_1^{-1} K g_0), \quad (8.36)$$

где g_0 и g_1 — произвольные матрицы группы $SU(n)$.

Производящая функция удовлетворяет любопытной системе дифференциальных уравнений. Учитывая, что $gg^{-1} = 1$, имеем

$$(\partial/\partial K_{ik})(\partial/\partial J_{kj}) W(J, K) = \delta_{ij} W(J, K). \quad (8.37)$$

Учитывая, что детерминант матриц $SU(n)$ равен единице, получаем

$$\det (\partial/\partial J) W(J, K) = W(J, K). \quad (8.38)$$

Дифференциальных уравнений (8.37) и (8.38) вместе с начальным условием

$$W(0, 0) = 1 \quad (8.39)$$

достаточно, чтобы найти W . Некоторые авторы исследовали эти уравнения в пределе больших n [11, 35]. Мы будем решать их, интегрируя по степеням J и K , и дадим графический алгоритм вычисления коэффициентов получающегося разложения.

Во-первых, исключим зависимость от K в W , выразив g^{-1} через алгебраические дополнения g по известной формуле:

$$(g^{-1})_{ij} = (\text{cof}(g))_{ij} = (1/(n-1)!) \epsilon_{j, i_1, \dots, i_{n-1}} \epsilon_{i, j_1, \dots, j_{n-1}} g_{i_1 j_1} \dots g_{i_{n-1} j_{n-1}}, \quad (8.40)$$

где ϵ обозначает полностью антисимметричный тензор с $\epsilon_{1 \dots n} = 1$. Это позволяет решать уравнение (8.37), заменяя производные по K производными по J :

$$W(J, K) = \exp(\text{Tr}(K \text{cof}(\partial/\partial J))) W(J), \quad (8.41)$$

где

$$W(J) = W(J, K=0) = \int dg \exp(\text{Tr}(Jg)). \quad (8.42)$$

Чтобы вычислить функцию $W(J)$, воспользуемся ее инвариантностью, вытекающей из (8.36):

$$W(J) = W(g_0^{-1} J g_1). \quad (8.43)$$

В приложении работы [46] доказано, что любая аналитическая функция J , удовлетворяющая этому равенству, зависит только от детерминанта J . Поэтому рассмотрим разложение

$$W(J) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (\det J)^i. \quad (8.44)$$

Нормировка (8.39) приводит к условию

$$a_0 = 1. \quad (8.45)$$

Из дифференциального уравнения (8.38) вытекает рекуррентное соотношение, определяющее последующие коэффициенты a_i разложения (8.44). Громоздкие комбинаторные вычисления [46] показывают, что

$$(\det(\partial/\partial J))(\det J)^i = \frac{(i+n-1)!}{(i-1)!} (\det J)^{i-1}. \quad (8.46)$$

Из уравнений (8.38), (8.44) и (8.46) получаем

$$a_i = \frac{(i-1)!}{(i+n-1)!} a_{i-1}. \quad (8.47)$$

С учетом (8.45) это дает

$$a_i = \frac{2!3! \dots (n-1)!}{i!(i+1)! \dots (i+n-1)!}. \quad (8.48)$$

Наконец, для $W(J)$ получаем разложение

$$W(J) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2! \dots (n-1)!}{i! \dots (i+n-1)!} (\det J)^i. \quad (8.49)$$

Заметим, что детерминант матрицы очень просто выражается через антисимметричный тензор ε :

$$\det J = (1/n!) \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \varepsilon_{j_1 \dots j_n} J_{i_1 j_1} \dots J_{i_n j_n}. \quad (8.50)$$

Для взятия производных в (8.35) можно использовать графические обозначения. Направленными отрезками прямых линий мы будем обозначать групповые элементы. На рис. 8.1 показаны два направленных отрезка; стрелки, направленные вверх, обозначают элементы g , а направленные вниз — элементы g^{-1} . Концам этих отрезков припишем матричные индексы соответствующих элементов группы. При этом стрелка указывает в направлении от первого индекса ко второму. На рис. 8.2 графически представлен интеграл (8.33).

$$g_{ij} = \begin{array}{c} j \\ \uparrow \\ i \end{array}$$

$$g_{ij}^{-1} = \begin{array}{c} i \\ \downarrow \\ j \end{array}$$

$$I = \begin{array}{ccccccc} j_1 & & j_n & k_1 & & k_m \\ \uparrow & \cdots & \uparrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ i_1 & & i_n & l_1 & & l_m \end{array}$$

Рис. 8.1. Графическое представление g и g^{-1} [46].

Рис. 8.2. Представление производящего интеграла (8.33) [46].

$$a \quad \delta_{ij} = i \text{ — } j$$

$$b \quad \varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{array}{c} i_2 \\ \diagup \quad \cdots \quad \diagdown \\ i_1 \quad \bullet \quad i_n \end{array} = \begin{array}{c} i_2 \\ \diagdown \quad \cdots \quad \diagup \\ i_n \quad \bullet \quad i_1 \end{array}$$

Рис. 8.3. Представление символа Кронекера (а) и антисимметричного тензора (б) [46].

Дельта-символ Кронекера δ_{ij} мы будем графически представлять в виде ненаправленного отрезка линии, связывающего индексы i и j , как показано на рис. 8.3, а. Антисимметричный тензор $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ гра-

фически представим в виде вершины с n расходящимися от нее отрезками линий, концам которых соответствуют индексы i_1, \dots, i_n . Поскольку порядок индексов существен, каждую вершину мы будем снабжать стрелкой, указывающей направление от первого индекса к последнему (рис. 8.3, б). Наконец, соединению двух линий соответствует матричное произведение, т. е. суммирование по индексу, соответствующему соединенным концам этих линий.

При подсчете групповых интегралов часто встречается произведение символов ϵ . В этом случае полезно использовать тождества

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} = n!, \quad (8.51)$$

$$\epsilon_{i, i_1 \dots i_{n-1}} \epsilon_{j, i_1 \dots i_{n-1}} = (n-1)! \delta_{ij}, \quad (8.52)$$

$$\epsilon_{i, j, i_1 \dots i_{n-2}} \epsilon_{k, l, i_1 \dots i_{n-2}} = (n-2)! (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (8.53)$$

В принятых выше графических обозначениях эти тождества показаны на рис. 8.4.

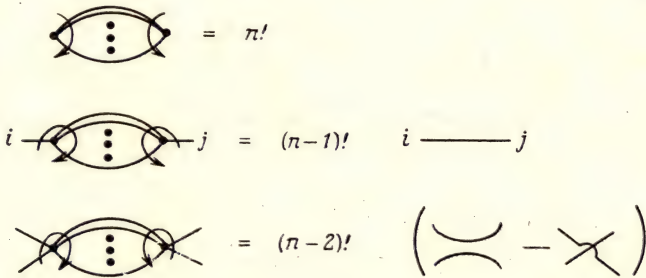


Рис. 8.4. Некоторые комбинаторные тождества [46].

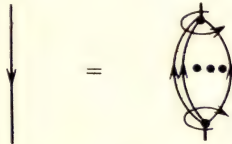


Рис. 8.5. Замена g^{-1} через алгебраические дополнения g [46].

Подсчет групповых интегралов состоит в замене направленных линий (рис. 8.2) вершинами и ненаправленными линиями, выражая тем самым результат через символы ϵ и δ . Первый шаг такой процедуры заключается в превращении исходного набора направленных линий в набор, в котором все линии направлены вверх. Это

достигается использованием формулы (8.40), графически представленной на рис. 8.5. Если в исходном графике большая часть линий направлена вниз, то проще сначала использовать равенство (8.20), согласно которому направления всех линий можно одновременно обратить. После одинаковой ориентации всех линий воспользуемся уравнениями (8.49) и (8.50), чтобы свести интеграл к сумме членов, содержащих антисимметричные тензоры. Заметим, что интеграл отличен от нуля только в том случае, когда число групповых элементов в подынтегральном выражении кратно n . Предполагая, что мы имеем np линий, где p — целое число, представим уравнение (8.49) графически, как показано на рис. 8.6. Кроме явно выписанного слагаемого здесь содержится также сумма по всем топологически различным способам соединения групповых индексов в пары

$$\left(\begin{array}{c} \uparrow \uparrow \dots \uparrow \end{array} \right)^p = \frac{2!3! \dots (n-1)!}{(p+1)! \dots (p+n-1)!} \left(\begin{array}{c} \text{diagram} \end{array} \right)^p + \text{перестановки}$$

Рис. 8.6. Вычисление интеграла, соответствующего выражению (8.49) [46].

вершин, обозначенная словом «перестановки». Множитель, выписанный на рис. 8.6, учитывает перестановки индексов, связанных с одной парой вершин, и перестановки вершинных пар. Вся сумма имеет $(np)!/(p!(n!)^p)$ слагаемых.

Некоторые тождества, которым удовлетворяют групповые элементы, имеют простую графическую интерпретацию. Например, инвариантность символа Кронекера

$$g_{ij} \delta_{jk} (g^{-1})_{kl} = \delta_{il} \quad (8.54)$$

соответствует рис. 8.7, а. Если вспомнить, что элементы группы g и g^{-1} в подынтегральном выражении соответствуют дифференцированию (8.41) по источникам J и K , то рис. 8.7, а отражает также тождество (8.37). Инвариантность антисимметричного тензора

$$g_{i_1 j_1} \dots g_{i_n j_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n} = \epsilon_{i_1 \dots i_n} \quad (8.55)$$

графически представлена на рис. 8.6, б и соответствует уравнению (8.38). Оба тождества, показанные на рис. 8.7, справедливы независимо от присутствия в диаграмме каких-либо других линий.

Заканчивая данную главу, приведем несколько простых примеров, иллюстрирующих эти правила. Рассмотрим сначала случай

$p = 1$ на рис. 8.6. Немедленно получаем

$$\int dg g_{i_1 j_1} \dots g_{i_n j_n} = (1/n!) \epsilon_{i_1 \dots i_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n}. \quad (8.56)$$

В низший порядок разложения сильной связи входит интеграл

$$I_{ijkl} = \int dg g_{ij} (g^{-1})_{kl}. \quad (8.57)$$

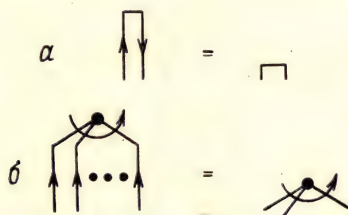


Рис. 8.7. Свойства инвариантности символа Кронекера (а) и антисимметричного тензора (б) [46].

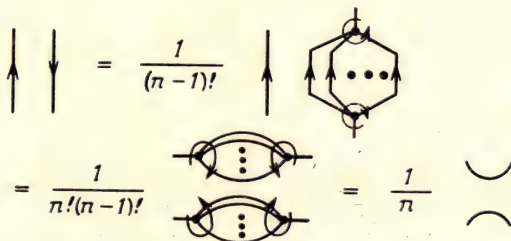


Рис. 8.8. Вычисление интеграла $\int dg g_{ij} g_{kl}^{-1}$ [46].

Он вычислен графически на рис. 8.8. Сначала мы использовали рис. 8.5, чтобы все линии были направлены вверх, затем рис. 8.6, чтобы исключить эти линии, и, наконец, тождество, представленное на рис. 8.4. В результате получаем

$$I_{ijkl} = (1/n) \delta_{jk} \delta_{il}. \quad (8.58)$$

В качестве последнего примера рассмотрим интеграл

$$I = \int dg g_{ij} (g^{-1})_{kl} g_{mn} (g^{-1})_{pq}. \quad (8.59)$$

На рис. 8.9 показано применение графического правила (рис. 8.5), выражающего интеграл I в виде $2n$ линий, направленных вверх. Ис-

пользование рис. 8.6 на этом этапе приводит к выражению с $(2n)!/(2!n!^2)$ слагаемыми. Некоторые простые приемы позволяют упростить это выражение в случае произвольного n . Все члены суммы имеют по четыре (четное число) ε -вершины: две в верхней и две

$$\begin{aligned}
 \text{Four vertical lines with arrows} &= \left(\frac{1}{(n-1)!} \right)^2 \text{ [Hexagon diagrams]} \\
 &= \alpha \text{ [Arc diagrams]} + b \text{ [Arc diagrams]}
 \end{aligned}$$

Рис. 8.9. Интеграл $\int dg g_{ij} g_{kl}^{-1} g_{mn} g_{pq}^{-1}$ [46].

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram with loop and 4 lines} &= \text{Diagram with 2 lines and loop} = \frac{1}{n} \text{ [Arc diagram]} \\
 &= \alpha \text{ [Arc diagrams with loop]} + b \text{ [Arc diagrams with loop]} \\
 &= (pa+b) \text{ [Arc diagram]} + (pb+a) \text{ [Arc diagram]}
 \end{aligned}$$

Рис. 8.10. Вычисление коэффициентов a и b в (8.60). Замкнутые циклы обозначают $\sum_i \delta_{ii} = n$ [46].

в нижней частях диаграммы. Их можно исключить, используя тождества, подобные тем, которые изображены на рис. 8.4. Результат выражается через δ -символы Кронекера, связывающие по отдельности индексы верхней и нижней частей диаграммы. Кроме того,

символ Кронекера не может связывать индексы i и m , или j и n , поскольку они первоначально могут быть связаны только посредством нечетного числа ε -вершин. Таким образом, интеграл должен иметь вид

$$I = a(\delta_{ii} \delta_{mq} \delta_{jk} \delta_{np} + \delta_{iq} \delta_{mi} \delta_{jp} \delta_{nk}) + \\ + b(\delta_{ii} \delta_{mq} \delta_{jp} \delta_{nk} + \delta_{iq} \delta_{mi} \delta_{jk} \delta_{np}), \quad (8.60)$$

В силу симметрии $kl \leftrightarrow pq$ подынтегрального выражения в (8.59) в формулу (8.60) входят только два независимых коэффициента a и b . Коэффициенты a и b можно найти, умножая (8.60) на δ_{jk} и используя рис. 8.7, a для сведения интеграла (8.59) к уже вычисленному интегралу (8.57) (рис. 8.8). Эта последовательность действий графически представлена на рис. 8.10 и приводит к заключению

$$a = 1/(n^2 - 1), \\ b = -1/(n(n^2 - 1)). \quad (8.61)$$

Подстановка (8.61) в (8.60) дает окончательный ответ для интеграла (8.59).

Упражнения

1. Покажите, что для матриц 2×2 $\det(A) = \frac{1}{2} ((\text{Tr} A)^2 - \text{Tr}(A^2))$. Какова соответствующая формула для матриц 3×3 ?
2. Для группы $SU(n)$ вычислите $\int dg \text{Tr}(g^n)$.
3. Покажите, что для неприводимых представлений R и R'

$$\int dg \chi_R^*(g) \chi_{R'}(g_1 g) = d_R^{-1} \delta_{RR'} \chi_R(g_1),$$

где d_R — размерность матриц в представлении R .

4. Докажите справедливость формулы (8.23).

Калибровочная инвариантность и параметры порядка

В случае чисто калибровочной теории без фермионов вильсоновская формулировка выявляет аналогию решеточной калибровочной теории с моделями статистической механики, описывающими магнетики. Величины U_{ij} играют ту же роль, что и «спины», расположенные в узлах кристаллической решетки. Эти переменные взаимодействуют друг с другом посредством четырехспиновой связи, описываемой вильсоновским действием. Продолжая эту аналогию, естественно спросить, допускает ли решеточная калибровочная теория «спонтанную намагниченность». Это явление в случае ферромагнетика приводит к ненулевому среднему от проекции спина в направлении намагниченности. Следовательно, в решеточной калибровочной теории мы должны искать такие фазы, в которых

$$\langle U_{ij} \rangle \neq 0. \quad (9.1)$$

Покажем теперь, что в решеточной теории Вильсона это невозможно.

В случае обычного магнетика отличие среднего спина от нуля означает спонтанное нарушение глобальной симметрии. Намагниченность должна выбрать некоторое направление — направление среднего спина. Оно может быть определено либо подходящим выбором граничных условий, либо заданием бесконечно малого внешнего магнитного поля. Выбранное направление является устойчивым в пределе бесконечного числа степеней свободы, т. е. в термодинамическом пределе. Температурные флуктуации не могут когерентно изменить направление намагниченности большого кристалла.

Однако в решеточной калибровочной теории условие (9.1) означает нарушение локальной симметрии — калибровочной инвариантности. Поскольку вильсоновское действие инвариантно относительно замены

$$U_{ij} \rightarrow g_i U_{ij} (g_j)^{-1}, \quad (9.2)$$

то это означает, что можно произвольным образом менять направление U_{ij} . Поскольку в отличие от ферромагнетика здесь не происходит изменения бесконечного числа степеней свободы, температурные флуктуации порождают локальные повороты (9.2) и в конечном счете приводят к усреднению по всем калибровкам [70]. С формальной точки зрения это означает, что при преобразовании

других групповых переменных ребер, связанных с узлом i :

$$U_{ik} \rightarrow U_{ij} U_{ik}, \quad k \neq j, \quad (9.3)$$

действие перестает зависеть от U_{ij} ; поэтому

$$\langle U_{ij} \rangle = \int dU_{ij} U_{ij}. \quad (9.4)$$

Правая часть равенства (9.4) обращается в нуль, если U_{ij} содержит только нетривиальные неприводимые представления калибровочной группы. Следовательно, в чисто калибровочной решеточной теории намагниченность отсутствует.

Это осложняет исследование, поскольку в спиновых моделях намагниченность является весьма полезным параметром порядка при описании различных фаз. В области высоких температур система находится в разупорядоченном состоянии и намагниченность тождественно равна нулю. Если при низких температурах спины имеют отличное от нуля среднее, то по определению это соответствует ферромагнитному состоянию. Далее, если мы сможем показать существование такого состояния при достаточно низких температурах, то тем самым будет доказано существование фазового перехода. В решеточной калибровочной теории среднее от U_{ij} всегда обращается в нуль и, следовательно, не может быть использовано для выявления фазовых превращений.

Поскольку калибровочная инвариантность играет ключевую роль в нашем анализе, мы должны подобрать калибровочно-инвариантный параметр порядка. В самом деле, поскольку интегрирование в функциональном интеграле производится по всем калибровкам, калибровочно-неинвариантные куски любого оператора не дают вклада в его среднее. Поэтому мы будем рассматривать только такие величины, которые инвариантны относительно преобразования (9.2). В случае чисто калибровочной теории простейшим объектом такого рода является след от произведения четырех переменных вдоль ребер, образующих грань, т. е. действие, соответствующее данной грани. Его среднее представляет собой внутреннюю энергию соответствующей термодинамической системы и сводится к производной от статистической суммы:

$$P = \langle 1 - (1/n) \text{Tr } U_{\square} \rangle = \frac{1}{6} (\partial / \partial \beta) \log Z. \quad (9.5)$$

Множитель $1/6$ есть отношение числа узлов к числу граней в случае четырехмерной решетки.

«Средняя грань» (среднее действие) P является параметром порядка в том смысле, что этот параметр должен выявлять глобальные термодинамические сингулярности. Однако он не обладает таким полезным свойством как намагниченность в магнетиках, поскольку нигде не обращается в нуль, за исключением точки с нулевой температурой. Тем самым невозможно различать фазы, требуя обращения среднего по грани в нуль для одной фазы и отличие его от нуля для другой. В действительности калибровочная инвариантность вообще препятствует существованию локального параметра порядка с таким же свойством, как и намагниченность в спиновых системах. Слово локальный означает, что усредняемая величина является функцией от калибровочных переменных, соответствующих фиксированной конечной области решетки. За несколько лет до основополагающей работы Вильсона Вегнер [171] рассмотрел решеточную калибровочную теорию с группой $Z_2 = \{\pm 1\}$ как представителя класса моделей, не имеющих локальных параметров порядка, но обладающих нетривиальной фазовой структурой.

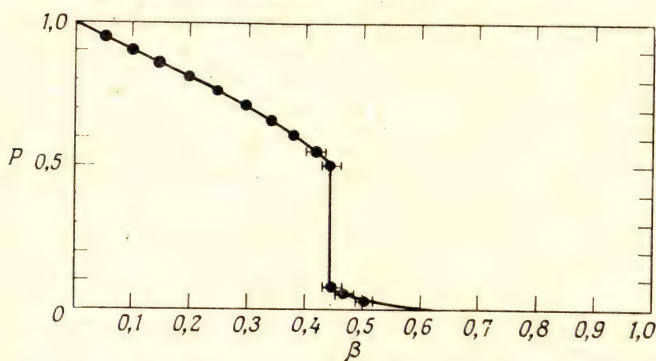


Рис. 9.1. Средняя грань для решеточной калибровочной теории с группой Z_2 . Точки получены моделированием на основе метода Монте-Карло, сплошные кривые — методом разложений сильной и слабой связи. Отметим разрыв величины P в точке фазового перехода при $\beta = \frac{1}{2} \lg(1 + \sqrt{2})$ [45].

Несмотря на свои недостатки в качестве параметра порядка, средняя грань играет важную роль в численном анализе, поскольку она является простейшей из вычисляемых величин. В самом деле, многие фазовые переходы проявляются как скачки, либо сингулярности P , рассматриваемой как функция константы связи. Так, например, на рис. 9.1 показана зависимость P от обратной температуры β для четырехмерной решетки с калибровочной группой Z_2 .

Точки найдены методом Монте-Карло, а сплошные кривые получены в рамках разложения сильной связи и с использованием соотношений дуальности. Все эти методы рассмотрены ниже. Резкий скачок величины P четко показывает наличие ярко выраженного фазового перехода первого рода.

Гипотетическая фаза деконфайнмента в калибровочной теории с непрерывной группой симметрии должна содержать безмассовые калибровочные бозоны. Используя формализм матрицы переноса для нахождения уровней энергии системы, мы определим массовую щель (mass gap) как разность энергий основного и первого возбужденного состояний. Эта величина должна быть точно равна нулю в фазе деконфайнмента, допускающей существование свободных глюонов.

В противоположность этому в фазе конфайнмента массивных кварков мы должны получить энергетический спектр массивных глюоболлов и связанных состояний кварков. Таким образом, массовая щель является параметром порядка, который должен обращаться в нуль в одной фазе и быть отличным от нуля в другой. На языке статистической механики массовая щель представляет собой обратную корреляционную длину. В статистической системе среднее от двух разделенных локальных операторов должно выявлять в общем случае корреляцию между этими операторами, которая должна ослабевать с увеличением расстояния между ними. Если в асимптотике это ослабление является экспоненциальным, то коэффициент ослабления и является массовой щелью m :

$$C(r) \sim \exp(-mr). \quad (9.6)$$

В справедливости этого можно убедиться, используя аппарат матрицы переноса вдоль направления разделения r . С физической точки зрения это уравнение представляет собой юкавский обмен легчайшей частицей в данной теории. В случае нулевой массовой щели мы получаем степенной закон убывания сил, подобно тому как это имеет место в электродинамике. Заметим, что массовая щель не является локальным параметром порядка, поскольку ее определение содержит корреляции между асимптотически разделенными операторами.

Использование массовой щели в качестве параметра порядка сильно затруднено в том случае, когда адронный спектр в фазе конфайнмента содержит безмассовые частицы. Это не просто академическое замечание, поскольку такая ситуация ожидается в случае нулевых голых масс кварков. В этом киральном пределе, упомянутом в гл. 3, γ_5 -инвариантность видна явным образом благодаря меха-

низму Намбу—Йона-Лазиньо [145] и Голдстоуна [84] с нулевой массой пиона. В этом случае исследование конфайнмента с помощью массовой щели требует изучения спина безмассовых квантов.

Для случая чисто калибровочной теории без кварков Вильсон предложил использовать другой нелокальный параметр порядка — след произведения калибровочных переменных, взятых вдоль замкнутого контура. Такая конструкция является калибровочно-инвариантной. Ее среднее значение называется петлей Вильсона:

$$W(C) = \langle \text{Tr} \prod_{ij \in C} U_{ij} \rangle. \quad (9.7)$$

Здесь C — рассматриваемый контур, а групповые элементы должны быть упорядочены вдоль направления обхода контура. Простейшей нетривиальной вильсоновской петлей является среднее по грани (9.5), которое имеет вид (9.7) с точностью до аддитивной константы.

Перемещение кварка вдоль контура C генерирует преобразование внутренней симметрии для его волновой функции, равное произведению реберных калибровочных переменных вдоль пути движения кварка. По существу петля Вильсона является количественной мерой влияния калибровочных полей на внешний кварковый источник, перемещающийся по периметру петли. В случае времениподобной петли это соответствует в начальный момент времени рождению пары кварк — антикварк, затем перемещению ее вдоль мировых линий, соответствующих боковым сторонам петли, и, наконец, аннигиляции в конечный момент времени. Если петля представляет собой прямоугольник размера $T \times R$, то аргументы, основанные на формализме матрицы переноса, приводят в пределе больших T к следующей асимптотике:

$$W(R, T) \underset{T \rightarrow \infty}{\sim} \exp(-E(R)T), \quad (9.8)$$

где $E(R)$ — энергия калибровочного поля, связанного с парой кварк-антикварковых источников, находящихся на расстоянии R друг от друга. Если эта энергия на больших расстояниях растет линейно:

$$E(R) \underset{R \rightarrow \infty}{\rightarrow} KR, \quad (9.9)$$

то мы приходим к следующему асимптотическому поведению больших прямоугольных вильсоновских петель:

$$W(R, T) \sim \exp(-KRT). \quad (9.10)$$

Среднее значение экспоненциально убывает с ростом площади петли, причем с коэффициентом, совпадающим с коэффициентом линейного роста потенциала. С физической точки зрения закон площадей отражает влияние мировой поверхности трубки потока, связывающего источники. Такая картина предполагает справедливость закона площадей не только для прямоугольных, но и для произвольных петель, достаточно больших по сравнению с поперечным размером трубки потока. В общем случае можно ожидать, что для линейно растущего потенциала

$$W(C) \sim \exp(-KA(C)), \quad (9.11)$$

где $A(C)$ — площадь минимальной поверхности, натянутой на контур C .

Если в рассматриваемой теории конфайнмент отсутствует, то энергия не должна неограниченно возрастать с увеличением расстояния. Скорее она должна стремиться к пределу, равному удвоенному значению собственной энергии изолированного кварка. В таком случае вильсоновское среднее убывает значительно медленнее с ростом размеров петли; в частности, оно имеет экспоненциальную зависимость от периметра контура:

$$W(C) \sim \exp(-kp(C)). \quad (9.12)$$

Здесь $p(C)$ — периметр контура C , а k — собственная энергия калибровочного поля, окружающего изолированный кварковый источник. Разумеется, зависимость от периметра всегда должна присутствовать даже в фазе конфайнмента, где закон площадей является доминирующим для достаточно больших петель.

Коэффициент пропорциональности в законе площадей (9.11) является еще одним параметром порядка в решеточной калибровочной теории. Он тождественно равен нулю в фазах деконфайнмента и отличен от нуля в случае линейного роста потенциала межкваркового взаимодействия. Этот параметр порядка детально исследован благодаря простой интерпретации на языке трубок потока и в силу легкости его вычисления в рассматриваемом ниже пределе сильной связи. Будучи прямо связанным с потенциалом взаимодействия кварков, данный параметр имеет прямой физический смысл. В частности, он должен оставаться конечным в непрерывном пределе для чисто глюонной теории. Иная ситуация имеет место в случае периметрического закона, содержащего расходимость собственной энергии кварка при снятии решеточного обрезания. Коэффициент пропорциональности в законе площадей, как и массовая щель, представляет собой нелокальный параметр порядка. Оба параметра опре-

деляются через асимптотическое поведение корреляторов. Но в отличие от массовой щели параметр, определяемый законом площадей (9.11), полезен и для дискретных групп, таких, как Z_2 . В этом случае исчезновение конфайнмента не связано с появлением безмассовой частицы.

Критерий конфайнмента, основанный на законе площадей, утрачивает свою значимость при рассмотрении кварков в качестве динамических переменных. Попытка разделения источников приведет в этой ситуации к рождению кварковых пар за счет вакуумных флуктуаций и, следовательно, к экранированию взаимодействия источников. По существу большая вильсоновская петля определяет потенциал взаимодействия двух мезонов, а не простых голых кварков. Если бы мы могли производить вычисления в полной теории, описывающей кварки и глюоны, нам не потребовался бы критерий конфайнмента. Нам нужно лишь вычислить спектр масс теории и сравнить его с экспериментом. Можно надеяться, что мы скоро достигнем этой цели.

Аналогичные весьма интересные вопросы, связанные с изучением параметров порядка, возникают и в калибровочных теориях слабых взаимодействий, где массы калибровочных бозонов генерируются благодаря механизму Хиггса [98]. В этих теориях решеточная техника почти не используется главным образом потому, что методы теории возмущений вполне адекватно описывают имеющиеся экспериментальные данные. В рамках стандартного представления отличное от нуля вакуумное среднее хиггсовского поля является источником появления безмассового голдстоуновского бозона [84], который затем поглощается калибровочным полем и становится продольной компонентой массивного векторного бозона.

Более детальный анализ показывает, однако, что представление об отличном от нуля вакуумном среднем хиггсовского поля является чересчур упрощенным. В частности, это поле и, следовательно, его вакуумное среднее не являются калибровочно-инвариантными величинами. В ряде калибровок, например во временной калибровке, вакуумное среднее хиггсовского поля должно быть строго равно нулю [58, 79], а масса векторного бозона обусловлена поведением вакуума под действием не зависящих от времени калибровочных преобразований, которые имеют нетривиальные свойства на пространственной бесконечности.

В решеточных калибровочных теориях интегрирование обычно ведется по всем калибровкам. Это приводит к усреднению хиггсовского поля по всем направлениям. Следовательно, хиггсовская фаза теории не имеет локального параметра порядка в том смысле, который мы обсудили в начале данной главы. Так же как при рассмотрении конфайнмента, можно было бы использовать в качестве

нелокального параметра порядка массовую щель для отличия хиггсовской фазы от фазы с безмассовыми векторными бозонами. Но при этом возникает довольно щекотливый вопрос. В чем различие между фазой Хиггса и фазой конфайнмента? И в самом деле, обе фазы должны иметь отличную от нуля массовую щель. Как показали Фрадкин и Шенкер [77], в некоторых случаях обе фазы действительно не отличаются друг от друга и связаны аналитическим продолжением. Это происходит тогда, когда хиггсовское поле берется в фундаментальном представлении калибровочной группы. Понятие конфайнмента при этом становится неясным, поскольку внешний источник может быть экранирован хиггсовскими частицами. В связи с этим явлением необходимо использовать какие-то другие слова для описания состояний в теории слабых взаимодействий с хиггсовскими полями в фундаментальном представлении. Например, электрон можно рассматривать как связанное состояние голого электрона и хиггсовской частицы, обладающее свойством конфайнмента [1].

Прервем теперь обсуждение параметров порядка и рассмотрим проблему фиксации калибровки в решеточной теории. В вильсоновской формулировке процедура квантования не требует выбора определенной калибровки. Каждый из интегралов по реберным переменным берется по компактной области, поэтому они не приводят к расходимостям при интегрировании по всем калибровкам. В непрерывной формулировке ситуация совсем иная из-за бесконечного объема калибровочных орбит, что обуславливает необходимость фиксации калибровки. Таким образом, кроме обрезания ультрафиолетовых расходимостей в теории поля, вильсоновское предписание обрезает также объем калибровочных орбит. С другой стороны, калибровочная инвариантность действия позволяет работать с фиксированной калибровкой без какого-либо воздействия на средние значения калибровочно-инвариантных операторов, таких, как вильсоновская петля. Рассмотрим теперь специальный класс калибровок, которые в решеточной теории имеют наиболее простую структуру [44].

Пусть $P(U)$ — некоторый полином по реберным переменным, который инвариантен относительно калибровочных преобразований (9.2). Приведенное ниже обсуждение целиком переносится на случай учета других полей, таких, как кварки. Но для простоты мы ограничимся рассмотрением чисто калибровочной теории. Сопоставим нашему полиному функцию Грина

$$G(P) = Z^{-1} \int (dU) e^{-S(U)} P(U). \quad (9.13)$$

Рассмотрим сначала отдельное ребро, связывающее узлы i и j . Предположим, что при вычислении среднего в (9.13) мы забыли проинтегрировать по этой выделенной реберной переменной. Замечательно, что такая забывчивость не влияет на результат вычисления $G(P)$. Чтобы убедиться в этом, определим дельта-функцию на калибровочной группе. Она обладает следующими свойствами:

$$\int dg \delta(g', g) f(g) = \int dg \delta(g, g') f(g) = f(g') \\ \delta(g, g') = \delta(g_0 g g_1, g_0 g' g_1), \quad (9.14)$$

где g_0 и g_1 — произвольные элементы группы. Фиксируем значение реберной переменной U_{ij} равным некоторому элементу g и в отличие от (9.13) не будем интегрировать по этому элементу, т. е. рассмотрим вместо (9.13) следующий интеграл:

$$I(P, g) = Z^{-1} \int (dU) \delta(U_{ij}, g) e^{-S(U)} P(U). \quad (9.15)$$

Ясно, что интегрирование (9.15) по g дает (9.13):

$$G(P) = \int dg I(P, g). \quad (9.16)$$

Если мы рассмотрим теперь калибровочное преобразование (9.2) и учтем калибровочную инвариантность величин $S(U)$, $P(U)$ и меры интегрирования, то получим

$$I(P, g) = I(P, g_i^{-1} g g_j). \quad (9.17)$$

Вследствие произвольности g_i и g_j мы приходим к заключению, что $I(P, g)$ в действительности не зависят от g . Тогда из уравнения (9.16) следует равенство

$$I(P, g) = G(P), \quad (9.18)$$

которое мы и стремились доказать. Итак, чтобы вычислить калибровочно-инвариантные функции Грина, можно фиксировать любую реберную переменную и проинтегрировать по остальным переменным.

Этот процесс можно повторять, чтобы фиксировать другие реберные переменные. В конце концов мы приходим к заключению, что можно неинтегрировать по любому набору ребер, не содержащему замкнутых петель. Иначе говоря, фиксированные ребра должны образовывать древесный граф, который может быть и несвязным.

Калибровка полностью определяется максимальным деревом, т. е. таким древесным графом, добавление к которому еще одного ребра порождает замкнутую петлю. Пример максимального дерева показан на рис. 9.2. Реберным переменным U_{ij} такого дерева можно приписать произвольные групповые элементы g_{ij} . Общая формула для функции Грина нашего калибровочно-инвариантного оператора имеет вид

$$G(P) = Z^{-1} \int (dU) \prod_{\{ij\} \in T} \delta(U_{ij}, g_{ij}) e^{-S(U)} P(U). \quad (9.19)$$

Здесь T — выбранное дерево, а символ $\{ij\}$ обозначает ребро, соединяющее узлы i и j с любой из двух возможных ориентаций.

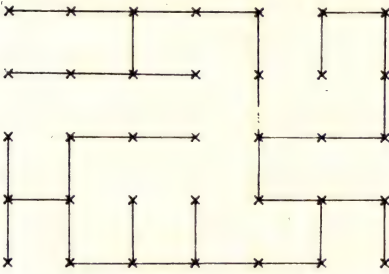


Рис. 9.2. Пример максимального дерева. Процесс фиксации калибровки заключается в произвольном выборе переменных на ребрах этого дерева.

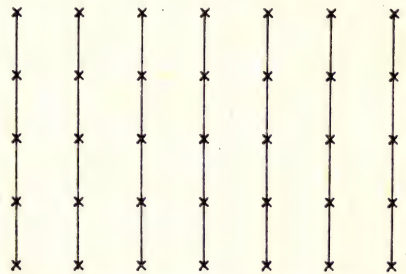


Рис. 9.3. Дерево, соответствующее временной калибровке. Вертикальные линии указывают направление оси времени.

Наиболее простая калибровка получается выбором единичного группового элемента для всех ребер заданного направления. Такой выбор соответствует аксиальной калибровке, которая означает, что одна из компонент векторного потенциала равна нулю. Выбирая направление временной оси, мы приходим к временной калибровке, соответствующей условию $A_0 = 0$. Эта калибровка удобна для построения матрицы переноса и гамильтоновой формулировки решеточной калибровочной теории. Временная калибровка показана на рис. 9.3; она сохраняет полный произвол для калибровочных преобразований, не зависящих от времени.

Заметим, что в случае аксиальной калибровки грани, параллельные соответствующей оси, приводят к простой спин-спиновой связи нефиксированных переменных. При этом теория сводится к набору одномерных спиновых цепочек, взаимодействующих друг с другом посредством четырехспиновой связи остальных граней. В случае

двух пространственно-временных измерений взаимодействие между цепочками отсутствует, и такая чисто калибровочная теория эквивалентна точно решаемой одномерной спиновой модели.

Упражнения

1. Постройте решение двумерной решеточной калибровочной теории при учете только калибровочных полей. Получите выражение для среднего по грани через простые интегралы по калибровочной группе. Покажите, что такая модель не имеет фазовых переходов. Убедитесь в том, что вильсоновские петли подчиняются закону площадей.

2. Рассмотрите решеточную калибровочную теорию, заменяя U_{\square} произведением реберных переменных для прямоугольников размера 1×2 (в единицах шага решетки), и с действием, представляющим собой сумму по всем таким прямоугольникам. Покажите, что данная двумерная модель не сводится к тривиальному случаю. Убедитесь в том, что двумерная Z_2 -модель имеет фазовый переход.

3. Найдите дерево, фиксирующее калибровку таким образом, что большинство нефиксированных ребер имеет ненулевое среднее даже в случае бесконечной решетки.

4. Вводя произвольную функцию $f(U)$ для фиксации калибровки, покажите, что рассмотренная выше калибровочно-инвариантная функция Грина дается выражением

$$G(P) = Z^{-1} \int (dU) (f(U)/\phi(U)) e^{-S} P(U),$$

где корректирующий множитель $\phi(U)$ Фаддеева — Попова [73] определяется следующим интегралом от функции f по всем калибровкам [109]:

$$\phi(U) = \int \left(\prod_i dg_i \right) f(g_i U_{ij} g_j^{-1}).$$

Проверьте, что для функции f , соответствующей формуле (9.19), $\phi = 1$.

Режим сильной связи аналогичен высокотемпературному пределу в статистической механике. Высокотемпературные разложения давно использовались в физике твердого тела. Однако до работы Вильсона они были мало известны теоретикам в области физики элементарных частиц. В самом деле, в непрерывной теории предел сильной связи является довольно неестественным и его трудно интерпретировать. В отличие от этого на решетке в пределе сильной связи теория значительно упрощается. Нужно лишь разложить больцмановский множитель по степеням обратной температуры β и вычислить члены получающихся рядов. В калибровочной теории каждая степень β связана с некоторым набором граней решетки. Это приводит к простой диаграммной технике, опирающейся на анализ графов, которые строятся с помощью таких граней [14, 179, 180].

Рассмотрим сначала прямоугольную вильсоновскую петлю в чистой $SU(n)$ -решеточной калибровочной теории без фермионов:

$$W(I, J) = Z^{-1} \int (dU) e^{-S} (1/n) \text{Tr} \prod_{ij \in C} U_{ij}. \quad (10.1)$$

Здесь контур C представляет собой прямоугольник размера $I \times J$ в единицах шага решетки, а множитель $1/n$ введен для удобства. Как обычно, групповые элементы U_{ij} упорядочены вдоль контура. На рис. 10.1 показан контур, соответствующий петле 3×3 . Поскольку предел сильной связи стохастизует групповые переменные, действие удобно упростить, устранив нормировочную аддитивную константу в выражении (7.6). Итак мы возьмем

$$\begin{aligned} S &= - \sum_{\square} (\beta/n) \text{Re Tr } U_{\square} = \\ &= - \sum_{\square} (\beta/(2n)) (\text{Tr } U_{\square} + \text{Tr } U_{\square}^*). \end{aligned} \quad (10.2)$$

Заметим теперь, что в силу равенства

$$\int (dU) U_{ij} = 0 \quad (10.3)$$

все вильсоновские петли обращаются в нуль при $\beta \rightarrow 0$. В самом деле, если мы хотим избежать обращения групповых интегралов в нуль в силу (10.3), каждому ребру рассматриваемого контура в подынтегральном выражении должна соответствовать по крайней мере еще одна такая же переменная, возникающая из разложения экспоненты. Следовательно, каждая переменная подынтегрального

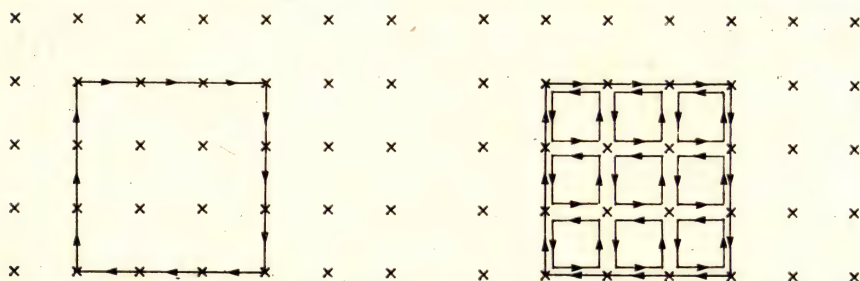


Рис. 10.1. Вильсоновская петля размера 3×3 .

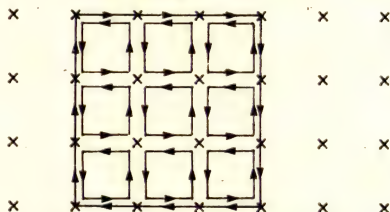


Рис. 10.2. Заполнение петли гранями решетки.

выражения, полученная из действия, должна иметь сопряженную переменную либо в исходном контуре, либо также полученную из действия. Первый неисчезающий вклад в разложение сильной связи получается при заполнении петли гранями, показанном на рис. 10.2. Следует обратить внимание на ориентацию контуров данного рисунка. Это имеет важное значение для всех групп $SU(n)$, за исключением группы $SU(2)$, для которой $\text{Tr} U_{\square}$ является вещественным. Вычисление диаграммы, показанной на рис. 10.2, требует использования интегралов

$$\int dg \, 1 = 1 \quad (10.4)$$

для ребер, лежащих вне контура, и

$$\int dg \, U_{ij} U_{kl}^{-1} = (1/n) \delta_{il} \delta_{jk} \quad (10.5)$$

для ребер внутри контура. Все такие интегралы можно объединить с помощью графических правил, приведенных в гл. 8. Это приводит к множителю n^{-1} для каждой пары реберных переменных с противоположными направлениями и к множителю n для каждого узла поверхности, заполненной элементарными гранями, включая ее границу. Учитывая множитель $\beta/(2n)$ для каждой грани, который получается из действия (10.2) при разложении экспоненты в

(10.1), получаем следующий результат:

$$W(I, J) \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \begin{cases} (\beta/(2n^2))^{IJ}, & n > 2 \\ (\beta/4)^{IJ}, & SU(2). \end{cases} \quad (10.6)$$

Группа $SU(2)$ отличается от остальных групп $SU(n)$ тем, что ориентация ее граней несущественна.

Мы видим, что уже в низшем нетривиальном порядке разложения сильной связи выполняется закон площадей

$$W(I, J) \sim e^{-KA}, \quad (10.7)$$

где площадь A равна

$$A = a^2 IJ, \quad (10.8)$$

а натяжение струны K в низшем порядке по β дается выражением

$$K \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \begin{cases} -a^{-2} \log(\beta/(2n^2)), & n > 2 \\ -a^{-2} \log(\beta/4), & SU(2). \end{cases} \quad (10.9)$$

Этот закон площадей выполняется и в случае контуров произвольной формы. В пределе малых β лидирующий коэффициент разложения всегда определяется минимальной поверхностью из элементарных граней, натягиваемой на рассматриваемый контур.

Поведение, определяемое законом площадей, в пределе сильной связи имеет почти универсальный характер. Оно справедливо для всех калибровочных групп, которые не содержат синглетов в прямом произведении фундаментального представления на любое число присоединенных представлений. Таким свойством обладает большинство физически интересных групп. С физической точки зрения это означает, что в случае, когда конечное число глюонов может нейтрализовать источник, взятый в фундаментальном представлении, они будут располагаться по краям большой вильсоновской петли и приведут к закону периметров. Такая ситуация имеет место для группы $SO(3)$, содержащей синглет в произведении трех представлений спина 1. Для больших петель соответствующая лидирующая диаграмма показана на рис. 10.3. Этот пример демонстрирует глюонный аналог явления, рассматриваемого в гл. 9, где сказано, что при введении в теорию кварков закон площадей перестает быть полезным параметром порядка.

Чтобы не выписывать уравнения для различных калибровочных групп, ограничимся рассмотрением группы $SU(3)$. Следующий порядок разложения сильной связи определяется диаграммой, получа-

емой из диаграммы низшего порядка заменой одной из накрывающих граней двумя гранями противоположной ориентации. Такая диаграмма показана на рис. 10.4. Новые интегралы вычисляются по формуле (8.56). Учет всех возможных диаграмм вида (10.4) дает

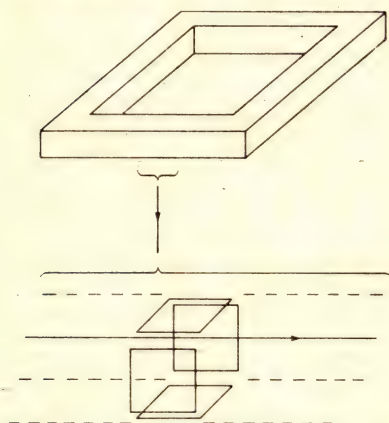


Рис. 10.3. Диаграмма разложения сильной связи для калибровочной теории с группой $SO(3)$. Ее вклад имеет экспоненциальную зависимость от периметра петли.

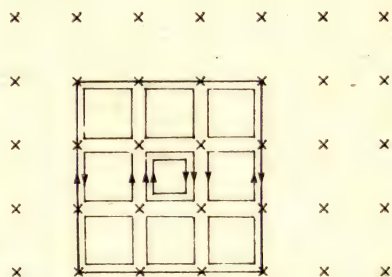


Рис. 10.4. Другая возможность заполнения петли элементарными гранями.

поправки к (10.6) и (10.9)

$$W(I, J) = (\beta/18)^{IJ} (1 + IJ\beta/12 + O(\beta^2)), \quad (10.10)$$

$$a^2 K = -\log(\beta/18) - \beta/12 + O(\beta^2). \quad (10.11)$$

Заметим, что в данном случае поправка определяется диаграммой такой же геометрической структуры, как и лидирующая диаграмма. Мы вновь имеем поверхность минимальной площади, покрывающую контур и отличающуюся лишь структурой покрытия. С помощью простой замены переменных можно просуммировать все вклады такого рода. Рассмотрим разложение по характеристам для экспоненты, содержащей вклад одной грани:

$$\exp(\tfrac{1}{3}\beta \operatorname{Re} \operatorname{Tr} U_{\square}) = N(\beta) (1 + \sum_{R \neq 1} b_R(\beta) \chi_R(U_{\square})). \quad (10.12)$$

Суммирование производится по всем неприводимым представлениям группы; χ_R — след или характер соответствующего представления. Используя соотношение ортогональности характеров (8.31), из

формулы (10.12) получаем следующие равенства:

$$N(\beta) = \int dU \exp(\tfrac{1}{3}\beta \operatorname{Re} \operatorname{Tr} U), \quad (10.13)$$

$$b_R(\beta) = N^{-1} \int dU (\chi_R U)^* \exp(\tfrac{1}{3}\beta \operatorname{Re} \operatorname{Tr} U). \quad (10.14)$$

Используя уравнение (10.12), можно заменить суммирование по степеням $\operatorname{Tr} U_\square$ для любой заданной грани суммированием по представлениям группы, каждое из которых входит в сумму только один раз. В низших порядках теории возмущений необходимые групповые интегралы легко вычисляются с помощью известной техники выделения синглетной части представлений, получающихся из граней, включающих заданное ребро. Недостатком этого метода является необходимость при возрастании порядка разложения учитывать все более высокие представления.

Проиллюстрируем работу метода на примере вычисления коэффициента натяжения струны $a^2 K$ вплоть до шестого порядка по β . Первые несколько коэффициентов разложения (10.12) для группы $SU(3)$ равны

$$b_3 = b_{\bar{3}} = \beta/6 + O(\beta^2), \quad (10.15)$$

$$b_6^* = b_{\bar{6}} = \beta^2/72 + O(\beta^3) = b_3^2/2 + O(b_3^3), \quad (10.16)$$

$$b_8 = \beta^2/36 + O(\beta^3) = b_3^2 + O(b_3^3). \quad (10.17)$$

Коэффициенты $b_R(\beta)$ для высших представлений имеют более высокий порядок по β . Чтобы не учитывать в (10.15) члены высших порядков, представим результаты в виде разложений по степеням b_3 . Заметим, что нормировочный множитель $N(\beta)$ сокращается за счет деления на Z при вычислении вакуумных средних. Как и выше, лидирующий вклад для плоской петли (10.1) определяется минимальной поверхностью, состоящей из элементарных граней. Поэтому выражение (10.9) дает

$$a^2 K \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} -\log(b_3/3). \quad (10.18)$$

Эта формула не имеет поправок вплоть до членов порядка b_3^4 . Ближайшая поправка по (10.18) определяется поверхностью, отличающейся от минимальной плоскости кубической выпуклостью, показанной на рис. 10.5. Эта поверхность содержит четыре дополнительные грани и приводит к следующим выражениям:

$$W(I, J) = (b_3/3)^{IJ} (1 + 4IJ(b_3/3)^4 + O(b_3^5)), \quad (10.19)$$

$$a^2 K = -\log(b_3/3) + 4(b_3/3)^4 + O(b_3^5). \quad (10.20)$$

Множитель 4 в поправках отражает тот факт, что выпуклость может располагаться по разные стороны от плоскости и в двух различных направлениях четырехмерного пространства, ортогональных двумерной плоскости.

Следующему вкладу соответствует та же диаграмма на рис. 10.5, но с нетривиальным представлением в основании куба. Если в основании куба разместить представление $\bar{3}$ и поменять на обратные ориентации его остальных граней, то это приведет к следующей модификации выражения (10.20):

$$a^2 K = -\log(b_3/3) + 4(b_3/3)^4 + 12(b_3/3)^5 + O(b_3^6). \quad (10.21)$$

С сикстетным либо октетным представлением в основании куба и подходящей ориентацией его поверхности мы получим вклады, пропорциональные произведению b_6 или b_8 на b_3^4 . В силу выражений (10.16), (10.17) эти вклады имеют порядок b_3^6 .

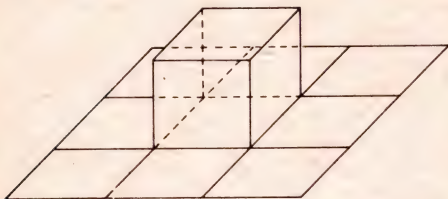


Рис. 10.5. Поправка порядка b_3^4 к натяжению струны.

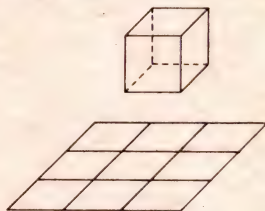


Рис. 10.6. Несвязная диаграмма.

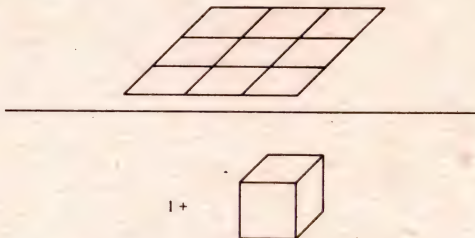


Рис. 10.7. Вклад от деления на Z .

В порядке b_3^6 возникает также новый тип поправок, обусловленных делением на Z при определении среднего от операторов. Статистическая сумма сама является суммой несвязанных диаграмм. Она приводит к сокращению диаграмм с нетривиальными представлениями на образованиях из граней решетки, полностью изолированных от исходной вильсоновской петли. Например, диаграмму рис. 10.6 можно не учитывать. Но деление позволяет также устра-

нить из рассмотрения дополнительные части диаграмм, соответствующие изолированным вкладам в Z , перекрывающимся со связными диаграммами числителя. Это приводит к появлению отрицательного вклада порядка b_3^6 в натяжение струны, соответствующего рис. 10.7.

Чтобы завершить построение вкладов шестого порядка в натяжение струны мы должны учесть также выпуклости больших раз-

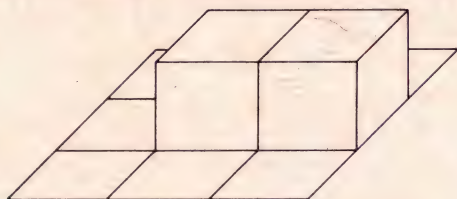


Рис. 10.8. Увеличенная выпуклость поверхности контура.

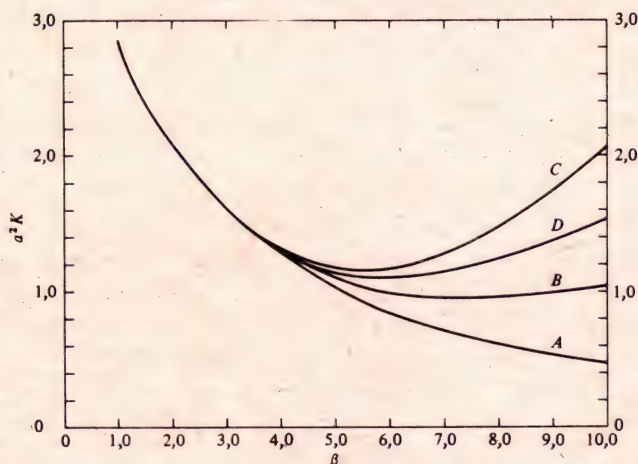


Рис. 10.9. Несколько первых приближений сильной связи для натяжения струны. Кривые A, B, C и D соответствуют учету вкладов 3, 4, 5 и 6 порядка по b_3 .

меров, показанные на рис. 10.8. Объединяя все вклады, находим

$$a^2 K = -\log(b_3/3) + 4(b_3/3)^4 + 12(b_3/3)^5 - 10(b_3/3)^6 + O(b_3^7). \quad (10.22)$$

Переход к вкладам более высоких порядков приводит к быстрому нарастанию объема вычислений. Мюнстер и Вейц [144] вычислили коэффициенты членов до 12 порядка по b_3 .

На рис. 10.9 показана зависимость первых четырех приближений сильной связи для величины $a^2 K$ от исходного обратного заря-

да β . Отметим, что при $\beta < 5$ результаты стабильны по отношению к учитываемому порядку разложения. Можно предполагать, что радиус сходимости рядов по β близок к пяти. В самом деле, известно, что теория аналитична в области малых β [48]. С другой стороны, обычная теория возмущений по константе связи в лучшем случае приводит к асимптотическим рядам [31, 32, 67, 128].

В рассматриваемой чисто глюонной теории интересно изучить разложение сильной связи для другой интересной физической величины — массовой щели. Легче всего ее получить из экспоненциального спада корреляции между двумя гранями, разделенными большим расстоянием. Такой путь позволяет изучить эффекты обмена глюоболлом между двумя калибровочно-инвариантными операторами. Диаграмма лидирующего порядка (рис. 10.10) имеет вид

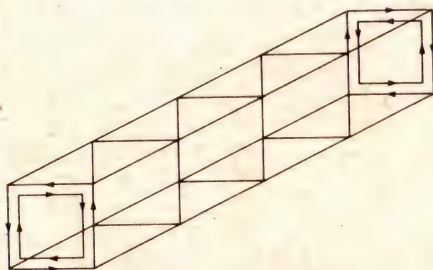


Рис. 10.10. Диаграмма для вычисления массовой щели методом сильной связи. Стороны квадратной трубки должны быть покрыты элементарными гранями.

трубки, образованной элементарными гранями и соединяющей разделенные грани. Данная диаграмма приводит к выражению

$$am_g = -4 \log(b_3/3) + O(b_3^2). \quad (10.23)$$

С помощью вычислительной процедуры, аналогичной той, которая изложена выше для натяжения струны, Мюнстер [144] нашел все коэффициенты разложения до порядка b_3^8 .

Рассматриваемый метод сильной связи допускает прямое обобщение на случай фермионов. Вспомним полное действие, введенное в гл. 7:

$$S = \beta \sum_{\square} (1 - (1/n) \text{Re Tr } U_{\square}) + \\ + \frac{1}{2} a^3 \sum_{\{i,j\}} \bar{\psi}_i (1 + \gamma_{\mu} e_{\mu}) U_{ij} \psi_j + (a^4 m_0 + 4a^3) \sum_i \bar{\psi}_i \psi_i. \quad (10.24)$$

В пределе сильной связи происходит стохастизация калибровочных полей. Это позволяет рассматривать второй член в (10.24) в качест-

ве возмущения. Данный «хоппинг»-член осуществляет перемещение кварков между соседними узлами. Поэтому мы будем исходить из теории со статическими кварками, описываемой последним членом действия (10.24), и разложим экспоненту с действием по степеням остальных членов. Строго говоря, получающиеся ряды не являются степенными рядами по g_0^{-2} , поскольку перемещение пары кварк — антикварк как единого объекта из одного узла в другой может приводить к сокращению калибровочных полей независимо от степени их стохастичности. Даже в пределе $g_0^{-2} = 0$ мы не получаем точно решаемой теории и должны использовать еще одно разложение. Дополнительным параметром разложения эффективно является обратная масса кварка, выраженная в единицах шага решетки.

Введем теперь источники, связанные с различными полями, следуя процедуре, использованной в гл. 5. Это позволит нам свести разложение сильной связи к манипулированию операторами рождения и уничтожения. Добавим к действию члены, линейные по внешним источникам и полевым переменным:

$$S_I = S + \sum_i (b_i \psi_i - \bar{\psi}_i c_i) + \sum_{\{ij\}} \text{Tr} (U_{ij} J_{ij} + U_{ji} \bar{J}_{ij}). \quad (10.25)$$

Здесь b и c — антикоммутирующие источники, рассматриваемые в гл. 5. Для калибровочных переменных мы ввели матричные источники J и \bar{J} , аналогичные величинам J и K , используемым в гл. 8 при определении производящей функции для групповых интегралов. Но теперь мы рассматриваем их в качестве независимых источников для каждого отдельного ребра решетки. Как и выше, функции Грина получаются дифференцированием по источникам. Будем представлять эти производные операторами рождения b^+ , c^+ , J^+ и \bar{J}^+ , удовлетворяющими коммутационным соотношениям:

$$[b_i, b_j^+]_+ = \delta_{i,j}, \quad (10.26)$$

$$[c_i, c_j^+]_+ = \delta_{i,j}, \quad (10.27)$$

$$[J_{ij}, J_{kl}^+] = \delta_{i,k} \delta_{j,l}, \quad (10.28)$$

$$[\bar{J}_{ij}, \bar{J}_{kl}^+] = \delta_{i,k} \delta_{j,l}. \quad (10.29)$$

Всем другим коммутаторам и антикоммутаторам приписывается нулевое значение. Для исключения источников введем «пустое вакуумное» состояние, удовлетворяющее условиям

$$b_i |0\rangle = c_i |0\rangle = J_{ij} |0\rangle = \bar{J}_{ij} |0\rangle = 0. \quad (10.30)$$

Напоминаем читателю, что в уравнениях (10.26) — (10.30) мы опустили спинорные и внутренние индексы. Указанные здесь явно индексы узлов не следует смешивать с матричными индексами величин J и \bar{J} .

Как и в гл. 5, определим производящее состояние

$$(W| = (0| \int (d\psi d\bar{\psi} dU) \exp(-S_I). \quad (10.31)$$

Функции Грина задаются выражением

$$\begin{aligned} \langle \psi_{i_1} \dots \psi_{i_n} \bar{\psi}_{j_1} \dots \bar{\psi}_{j_n} U_{k_1 l_1} \dots U_{k_m l_m} \rangle = \\ = Z^{-1} (W| b_{i_1}^+ \dots b_{i_n}^+ c_{j_1}^+ \dots c_{j_n}^+ J_{k_1 l_1}^+ \dots J_{k_m l_m}^+ |0), \end{aligned} \quad (10.32)$$

где статистическая сумма равна

$$Z = (W|0). \quad (10.33)$$

Исходя из рассматриваемой ниже аналогии с моделью струны, назовем пространство, в котором действуют операторы рождения и уничтожения, «струнным пространством». Оператор J_{ij}^+ создает отрезок струны, направленный из узла i в узел j . Источник b_i^+ порождает антикварк, а источник c_i^+ — кварк в узле i . Разумеется, эти «кварковые» состояния в струнном пространстве не следует отождествлять с состояниями физического гильбертова пространства в мире Минковского. При обсуждении гамильтоновой формулировки решеточной калибровочной теории такие физические состояния мы будем обозначать угловыми скобками $|\psi\rangle$.

Теория возмущений в пределе сильной связи основывается на представлении полного действия в виде суммы двух частей:

$$S = S_0 + S', \quad (10.34)$$

где S_0 — статическое кварковое действие

$$S_0 = (a^4 m_0 + 4a^3) \sum_i \bar{\psi}_i \psi_i \quad (10.35)$$

а S' содержит остальные члены уравнения (10.24).

Запишем производящую функцию в виде

$$(W| = (W_0| \exp(-S'(b^+, c^+, J^+, \bar{J}^+)). \quad (10.36)$$

В этой формуле аргументы ψ , $\bar{\psi}$ и U в выражении для S' заменены соответствующими операторами рождения источников. Невозму-

шенное производящее состояние определено выражением.

$$(W_0| = (0| \int (d\psi d\bar{\psi} dU) \exp(-S_0 - \sum_i (b_i \psi_i - \bar{\psi}_i c_i) - \sum_{\{ij\}} \text{Tr}(U_{ij} J_{ij} + U_{ji} \bar{J}_{ij})). \quad (10.37)$$

Поскольку S_0 квадратично зависит от антикоммутирующих полей, фермионный интеграл легко берется выделением полного квадрата:

$$\int (d\psi d\bar{\psi}) \exp(-S_0 - \sum_i (b_i \psi_i - \bar{\psi}_i c_i)) = N \exp(-\sum_i b_i (4a^3 + ma^4)^{-1} c_i). \quad (10.38)$$

Несущественный нормирующий множитель N представляет собой произведение по всем узлам величины $(a^4 m_0 + 4a^3)$. Интеграл по калибровочным полям в (10.37) в случае одного ребра детально изучен в гл. 8. Поэтому мы приходим к равенству

$$\int (dU) \exp(\sum_{\{ij\}} \text{Tr}(U_{ij} J_{ij} + U_{ji} \bar{J}_{ij})) = \prod_{ij} W_G(J_{ij}, \bar{J}_{ij}), \quad (10.39)$$

где W_G — производящая функция (8.41).

Собирая вместе все множители, получаем следующее выражение для производящего состояния:

$$\begin{aligned} (W| = (0| \exp(-\sum_i b_i (4a^3 + ma^4)^{-1} c_i) \prod_{ij} W_G(J_{ij}, \bar{J}_{ij}) \times \\ \times \exp(-\frac{1}{2} i a^3 \sum_{\{ij\}} c_i^+ (1 + \gamma_\mu e_\mu) J_{ij}^+ b_j^+) \times \\ \times \exp(-\beta \sum_{\square} (1 - (1/n) \text{Re Tr} \prod_{\{ij\} \in \square} J_{ij}^+)). \end{aligned} \quad (10.40)$$

Разложение сильной связи следует из разложения экспонент последних двух членов в степенные ряды.

Все четыре сомножителя в выражении (10.40) имеют простую интерпретацию в струнном пространстве. Первый член уничтожает пару кварк — антикварк в их общем узле; второй член уничтожает отрезки струны, связывающие соседние пары узлов; третий член рождает пары кварк — антикварк, в которых кварк и антикварк разделены на один шаг решетки и соединены отрезком струны, направленным к антикварку; наконец, последний член рождает элементарные квадраты из отрезков струны. Такая картина рождения и уничтожения кварков и отрезков струн лежит в основе удобной диаграммной техники.

Рассмотрим некоторую функцию Грина вида (10.32). Ее вычисление может быть выполнено с помощью следующих графических правил, вытекающих из (10.40).

(1) Изобразить на решетке отрезки струны, кварки и антикварки, порождаемые операторами правой части выражения (10.32).

(2) Используя третий сомножитель формулы (10.40), создать отрезки струны, связывающие пары кварк—антикварк таким образом, чтобы получаемая конфигурация содержала равное число кварков и антикварков в каждом узле. При наличии нескольких сортов кварков это условие должно быть выполнено для каждого сорта. На этой стадии выполняется также генерация замкнутых кварковых петель. Каждой созданной комбинации кварк—струна—антикварк следует сопоставить в амплитуде множитель $1/2ia^3(1 + \gamma_\mu e_\mu)$. Для свертки спинорных индексов гамма-матриц воспользоваться правилом (4).

(3) С помощью последнего множителя в выражении (10.40) построить элементарные квадраты из отрезков струны, генерируя тем самым такую конфигурацию, чтобы каждая соседняя пара узлов обладала набором отрезков струн, содержащих синглет калибровочной группы. Так, для группы $SU(3)$ число отрезков струны, направленных от i к j , минус число отрезков с противоположным направлением должно давать число, кратное трем. Каждая грань вносит в диаграмму множитель $\beta/6$. Набор m тождественных граней дает дополнительный множитель $1/m!$. Другой путь состоит в использовании параметров b_R , входящих в уравнение (10.12), и одевании граней различными представлениями.

(4) Теперь первый член в (10.40) позволяет связать кварковые и антикварковые линии. Они по отдельности спариваются в каждом узле; при этом следует свернуть спинорные индексы и индексы ароматов, различающие сорта кварков, а также индексы внутренней симметрии у элементов струны. Каждая связь кварк—антикварк, локализованная в одном узле, приводит к множителю $(4a^3 + m a^4)^{-1}$ в амплитуде.

(5) К этому шагу процесс построения диаграммы полностью завершен. Теперь необходимо выполнить групповое интегрирование. Для этой цели можно воспользоваться графическими правилами, изложенными в гл. 8. Если же использовать параметры b_R разложения по характерам, то можно двигаться тем же путем, как и в задаче вычисления натяжения струны, рассмотренной в начале данной главы.

(6) Следует учесть множители типа (-1) , обусловленные фермионной природой кварков. Так, каждая замкнутая кварковая петля

порождает множитель (-1) . Других множителей не появляется, если в исходной функции Грина (10.32) ψ и $\bar{\psi}$ упорядочены стандартным образом, т. е. каждое ψ_{i_k} связано посредством кварковой линии с $\bar{\psi}_{j_k}$. Если это не так, то необходимо расставить все ψ в том же порядке, в котором расставлены $\bar{\psi}$, с которыми они связаны. При этом появляется множитель (-1) в степени, равной числу совершенных перестановок. Это правило имеет полную аналогию в обычной диаграммной технике Фейнмана, где каждая перестановка внешних фермионных линий приводит к изменению знака диаграммы.

(7) Просуммировать все различные диаграммы разложения сильной связи заданного порядка.

(8) Разделить на Z , т. е. на сумму диаграмм, описывающих вакуумные флуктуации. Это позволит устранить вклады от полностью несвязных кусков диаграммы, а также, как отмечалось при обсуждении натяжения струны, вклады от вакуумных флуктуаций, перекрывающихся с диаграммой числителя в (10.32).

Проиллюстрируем эти правила на простом примере. Рассмотрим только один сорт кварков и исследуем следующую функцию Грина:

$$\langle \bar{\psi}_i \gamma_5 \psi_i \bar{\psi}_j \gamma_5 \psi_j \rangle. \quad (10.41)$$



Рис. 10.11. Пары кварк — антикварк, порождаемые корреляционной функцией в (10.41) [45].

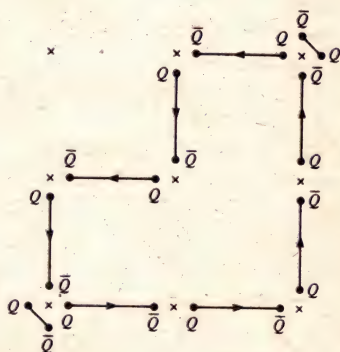


Рис. 10.12. Набор комбинаций кварк — струна — антикварк, спаривающих все кварки с антикварками [45].

Это выражение представляет собой двухточечную функцию составного псевдоскалярного поля $\bar{\psi}_i \gamma_5 \psi_i$. Правило (1) говорит нам, что пары кварк—антикварк следует поместить в узлы i и j , как показано на рис. 10.11. На этом рисунке вертикальная линия соответствует оси x_0 , а горизонтальная — оси x_1 . На рис. 10.12 показан один из

возможных способов применения правила (2), требующего добавления комбинаций кварк—струна—антикварк таким образом, чтобы в каждом узле присутствовало одинаковое число кварков и антикварков. Далее следует одеть диаграмму элементарными гранями в соответствии с правилом (3) (рис. 10.13). Производя соединения, согласно правилу (4), получаем диаграмму рис. 10.14. Наконец,

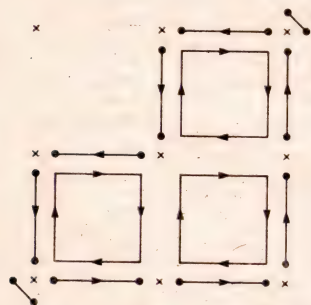


Рис. 10.13. Одевание диаграммы элементарными гранями [45].

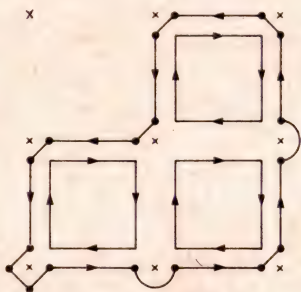


Рис. 10.14. Внесение кварковых связей [45].

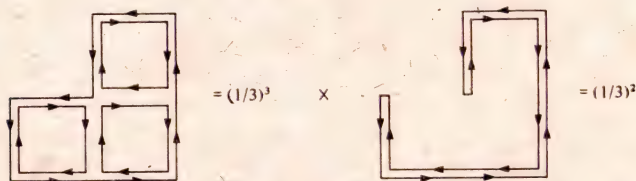


Рис. 10.15. Вычисление групповых интегралов [45].

правило (5) предписывает повторное использование рис. 8.8, что приводит к рис. 10.15. Собирая все необходимые множители, приходим к следующему вкладу нашей диаграммы в амплитуду:

$$(ia^3)^8 \left(\frac{\beta}{6}\right)^3 (4a^3 + ma^4)^{-10} 3^{-2} \text{Tr } \Gamma, \quad (10.42)$$

где Γ — произведение дираковских операторов, порожаемое границей диаграммы:

$$\begin{aligned} \text{Tr } \Gamma &= 2^{-8} \text{Tr} (\gamma_5(1 + \gamma_0)(1 + \gamma_1)(1 + \gamma_0)(1 + \gamma_1), \\ &\gamma_5(1 - \gamma_0)^2(1 - \gamma_1)^2) = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (10.43)$$

Заметим, что выражение (10.42) можно представить в виде

$$3(4a^3 + ma^4)^{-2} \text{Tr } \Gamma (4 + ma)^{-p} (\beta/18)^4, \quad (10.44)$$

где p — полная длина кварковой линии в единицах шага решетки, а A — площадь поверхности, покрытой элементарными гранями, измеренная в единицах a^2 . Выражение (10.44) служит основанием для рассматриваемой ниже аналогии со струной. Обратим внимание на сильное сокращение степеней шага решетки в выражении (10.42). Учитывая это обстоятельство, часто делают масштабное преобразование фермионных полей, чтобы сделать равным единице множитель, возникающий от связывания кварков на этапе выполнения правила (4). Тогда при любом «перескакивании» кварка от одного узла к другому в соответствии с правилом (2) мы получаем множитель

$$i(4+ma)^{-1} \frac{1}{2}(1+\gamma_\mu e_\mu) = iK_h(1+\gamma_\mu e_\mu). \quad (10.45)$$

В «наивном» непрерывном пределе хоппинг-параметр K_h стремится к $1/8$. При конечном шаге решетки это критическое значение K_h , соответствующее нулевой голой массе кварка, может быть существенно перенормировано за счет взаимодействий. Разложение сильной связи в действительности сводится к разложениям по степеням β и K_h .

Выражение (10.44) обобщается на все диаграммы с такой же топологией, как диаграмма на рис. 10.14, т. е. на все диаграммы с единственной поверхностью из элементарных граней, опирающейся на кварковую линию. Это обстоятельство выявляет тесную связь теории Вильсона с моделью ориентированной струны, для которой вклад в действие от конкретной мировой поверхности, которая замывается струной, пропорционален ее площади. В пределе сильной связи эффективное натяжение струны K совпадает с величиной, вычисленной в начале этой главы. Связь со струнной моделью в случае двумерного пространства-времени может быть сформулирована строго [10]. Четырехмерная картина не сводится к простой струнной модели [83] из-за сложного характера взаимодействия струн, проявляющегося в высших порядках [173].

Аналогия со струной приводит к полезной топологической классификации диаграмм в методе сильной связи. Например, топологический прототип диаграмм для двухточечной функции (10.41) показан на рис. 10.16. В этой диаграмме мировой лист, построенный из элементарных граней, имеет дыру, ограниченную кварковой петлей. Такая диаграмма приводит к следующему вкладу:

$$-\frac{1}{3}(4a^3+ma^4)^{-2} \text{Tr}(\Gamma_E) \text{Tr}(\Gamma_I)(4+ma)^{-p} (\beta/18)^A, \quad (10.46)$$

где Γ_E — произведение матриц Дирака для внешней петли, а Γ_I — для внутренней петли. Здесь величина p также равна полной

длине кварковой линии и включает в себя оба фермионных контура. Множитель $1/3$ в выражении (10.46) является параметром топологического разложения по степеням $1/n$ [165]. Каждой дополнительной кварковой петле, вносимой в мировой лист струны, соответствует множитель $1/3$. На рис. 10.17 показана диаграмма, дающая вклад в структуру бариона. В сильно связанной решеточной калибровочной теории протон состоит из трех кварков, расположенных на концах струн, образующих конфигурацию «Y».

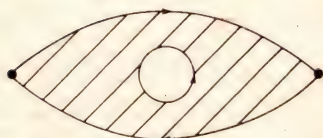


Рис. 10.16. Тип диаграмм, дающих вклад в мезонные пропагаторы [45].

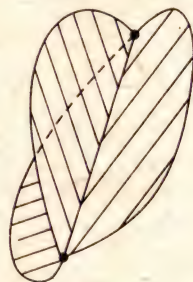


Рис. 10.17. Тип диаграмм, описывающих барионный пропагатор в пределе сильной связи [45].

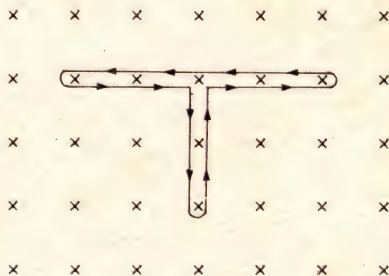


Рис. 10.18. Диаграмма, приводящая к ненулевой трехточечной функции даже в пределе бесконечных g_0^2 .

Как отмечалось выше, разложение сильной связи сводится к рядам по степеням g_0^{-2} и K_h . В частности, даже в пределе $g_0^2 \rightarrow \infty$ или $\beta \rightarrow 0$ при конечном K_h не удастся получить точного решения. В этом пределе элементарные грани из отрезков струны вообще отсутствуют. Поэтому оба мезонных кварка должны вместе перемещаться от узла к узлу. Тем не менее адроны не являются свободными частицами, поскольку у них сохраняется возможность обмена указанными мезонами с нулевым радиусом. Например, трехточеч-

ная вершина, показанная на рис. 10.18, не обращается в нуль. Не следует ожидать, что использование этого предела позволит дать успешное описание имеющихся данных, но он привлёк к себе большое внимание как полезное упрощение в связи с изучением нарушения киральной симметрий в теориях с конфайнментом.

Т'Хофт [166] высказал предположение о наличии глубокой связи между конфайнментом и нарушением киральной симметрии. Он показал, что теории с конфайнментом, включающие в себя фермионы с нулевой голой массой и не имеющие безмассовых голдстоуновских бозонов, связанных с киральной симметрией, должны удовлетворять очень сильным ограничениям. В этом случае возникает серьёзная проблема, связанная с аналитическими свойствами трехточечной вершинной функции, построенной из двух векторных и одного аксиального токов. Наличие аномалии требует неаналитичности этого объекта при нулевом переданном импульсе в каждом из трех каналов. Отсюда вытекает необходимость существования физических промежуточных состояний с нулевой массой. В теориях с конфайнментом эти состояния могут быть либо голдстоуновскими бозонами, либо безмассовыми барионами. Последующий анализ [9, 42] показал, что вторая возможность исключается во многих теориях, в том числе, по-видимому, в $SU(3)$ -теории сильных взаимодействий.

Соответствующие проблемы возникают и в сильно связанной решеточной калибровочной теории. Они требуют исследования проблемы удвоения числа фермионов, затронутой в гл. 5. Теория с $g_0^2 = \infty$ и конечным K_h не является точно решаемой и требует дальнейших упрощений, таких, как переход к большим размерностям (метод среднего поля) или к большим калибровочным группам. Результаты соответствующих расчетов содержат серьезные указания на то, что теория допускает две возможности нарушения киральной симметрии: присутствие безмассовых «пионов» и отличие от нуля вакуумного среднего от $\bar{\psi}\psi$ [28, 110, 163].

Упражнения

1. Рассчитайте диаграмму, показанную на рис. 10.3, и покажите, что она действительно приводит к закону периметров.
2. Обладает ли сильно связанная $SO(3)$ -решеточная калибровочная теория конфайнментом в смысле наличия массовой щели?

Теория возмущений является одной из главных отправных точек развития современной теоретической физики частиц. Действительно, успехи пертурбативной квантовой электродинамики легли в основу почти всеобщего восприятия перенормируемой квантовой теории поля как основы для описания взаимодействий элементарных частиц. Поскольку наша пространственно-временная решетка представляет собой регуляризацию ультрафиолетовых расходимостей, все результаты пертурбативного подхода могут быть в принципе воспроизведены в решеточном подходе. Параметр разложения g_0^2 является температурой в аналогичной статистической системе. При низких температурах наиболее важными объектами теории являются низкоэнергетические возбуждения, характеризующиеся плавными длинноволновыми вариациями полей. Аналогами таких возбуждений в магнетиках являются спиновые волны, а теория возмущений представляет собой разложение по спиновым волнам.

Теория возмущений не служила первоначальной причиной создания решеточной формулировки калибровочных теорий. В рамках других схем обрезания, таких, как регуляризация Паули—Вилларса [150] или размерная регуляризация [5, 30, 167], уже имелись детально разработанные методы вычислений. Поэтому теория возмущений на решетке привлекла мало внимания и остается пока довольно слабо развитой. В этой короткой главе мы лишь коснемся техники спиновых волн для решеточной калибровочной теории. Мы ограничимся вычислением вкладов низшего порядка в среднее по грани. Ирония судьбы заключается в том, что режим слабой связи, играющей столь незначительную роль в решеточной калибровочной теории, реализуется как раз в области перехода к непрерывному пределу. Эта проблема обсуждается в последующих главах. Главным же назначением решетки остается непертурбативный анализ.

Ограничимся рассмотрением чисто калибровочной теории, которая описывается следующей статистической суммой:

$$Z = \int (dU) \exp(-\beta \sum_{\square} (1 - (1/n) \operatorname{Re} \operatorname{Tr} U_{\square})). \quad (11.1)$$

Поскольку мы рассматриваем область больших значений обратной константы связи β , интеграл в (11.1) насыщается значениями U_{\square} ,

близкими к единице. Теория возмущений основана на методе перевала в области максимума аргумента экспоненты. Параметризуем операторы элементарной грани следующим образом:

$$U_{\square} = \exp(i\lambda^{\alpha}\omega_{\square}^{\alpha}), \quad (11.2)$$

где матрицы λ^{α} служат генераторами калибровочной группы и нормированы условиями (6.6), (6.7). В лидирующем порядке мы получаем

$$1 - (1/n) \operatorname{Re} \operatorname{Tr} U_{\square} = (1/(4n)) \omega_{\square}^2 \omega_{\square}^2 + O(\omega_{\square}^4), \quad (11.3)$$

и, следовательно, Z принимает вид

$$Z = \int (dU) \exp(-(\beta/(4n)) \omega_{\square}^2 \omega_{\square}^2 + O(\beta\omega^4)). \quad (11.4)$$

При больших β экспонента сильно подавлена вне области

$$\omega = O(\beta^{-1/2}) = O(g_0). \quad (11.5)$$

Поэтому члены с ω^4 в (11.4) имеют величину порядка g_0^2 .

Мы хотим вычислить лидирующий вклад в интеграл (11.4), который имеет гауссову форму в основном приближении. При этом мы сталкиваемся с технической трудностью, связанной с тем фактом, что подынтегральное выражение, рассматриваемое как функция реберных переменных U_{ij} , спадает не во всех направлениях. В самом деле, с помощью калибровочного преобразования можно произвольным образом изменить значение одной из реберных переменных, не меняя действия. Поэтому фиксация калибровки является необходимым первым шагом пертурбативного анализа. Наше подынтегральное выражение подавлено гауссовым образом только в тех направлениях, которые не являются калибровочными степенями свободы.

Детали выбора калибровки не имеют значения для нашего рассмотрения. Одна из возможностей состоит в фиксировании единичных значений переменных на всех ребрах временного направления, т. е. в выборе временной калибровки. После этого на пространственноподобной поверхности $t = 0$ следует провести дополнительную фиксацию калибровки, чтобы исключить калибровочные преобразования, не зависящие от времени. Если теперь мы рассмотрим любое конкретное ребро, его переменная будет стремиться к единице при $\beta \rightarrow \infty$. Но этот предельный переход не является равномерным, поскольку ребра, далекие от гиперплоскости $t = 0$, подвержены более слабым ограничениям, чем те, которые находятся

вблизи нее. Поэтому мы используем инфракрасное обрезание, переходя к конечной решетке.

После фиксации калибровки четвертая часть всех ребер уже не является переменными интегрирования. Остальные ребра близки к единичным значениям, поэтому мы можем использовать разложение

$$U_{ij} = 1 + i\lambda^2 \omega_{ij}^2 + O(\omega_{ij}^2), \quad (11.6)$$

$$\omega_{\square}^2 = \sum_{ij \in \square} \omega_{ij}^2 + O(\omega^2). \quad (11.7)$$

Мера интегрирования в окрестности единичного элемента группы имеет следующий простой вид:

$$dU_{ij} = (J + O(\omega_{ij}^2)) d^{n_g} \omega_{ij}, \quad (11.8)$$

где вес J представляет собой несущественную константу. Число генераторов группы мы обозначили через n_g . Теперь статистическая сумма принимает вид

$$Z = K \int \prod_{\{ij\}} d^{n_g} \omega_{ij} \exp [(-\frac{1}{2} \beta \omega D^{-1} \omega) + O(\beta \omega^3)]. \quad (11.9)$$

Здесь K — общий постоянный множитель, а D^{-1} — матрица большой размерности, действующая в пространстве переменных ω_{ij} . В такой форме статистическая сумма сильно напоминает случай свободного поля, рассмотренного в гл. 4. Оператор D является пропагатором калибровочных глюонов и входит в фейнмановские диаграммы данной теории. Члены $O(\beta \omega^3)$ имеют тот же порядок, что и константа связи; они генерируют вершины диаграмм.

Решеточные пропагаторы довольно громоздки для практических расчетов. Но мы можем без особых усилий получить полезную информацию относительно средней грани. Поскольку наш интеграл имеет гауссову форму, он сводится к детерминанту

$$Z = K' |D/\beta|^{\frac{1}{2}} (1 + O(\beta^{-1})). \quad (11.10)$$

Матрица D имеет ту же размерность, что и параметрическое пространство после фиксации калибровки. Следовательно, это квадратная матрица размерности $3n_g N^4$. Множитель 3 есть число нефиксированных ребер для каждого узла. Выделяя множитель β из каждой строки матрицы D , получаем

$$Z = K' |D|^{\frac{1}{2}} \beta^{-3n_g N^4/2} (1 + O(\beta^{-1})). \quad (11.11)$$

Это приводит к следующему выражению для средней грани:

$$P = -(1/(6N^4)) (\partial/\partial \beta) \log Z = n_g/(4\beta) + O(\beta^{-2}). \quad (11.12)$$

Полученный результат имеет простую интерпретацию в статистической механике. Имеется $3n_g N^4$ физических переменных, распределенных по $6N^4$ граням. Если мы припишем каждой степени свободы среднюю энергию $1/2kT = 1/(2\beta)$, то получим в точности формулу (11.12). Этот простой подсчет количества переменных при более высоких температурах должен быть скорректирован следующими поправками, для вычисления которых необходим учет нелинейных взаимодействий.

На рис. 11.1 просуммированы лидирующие вклады разложений сильной и слабой связи для калибровочной группы $SU(3)$:

$$P = 1 - \beta/18 - \beta^2/216 + O(\beta^3) = 2/\beta + O(\beta^{-2}). \quad (11.13)$$

Приведенные на рисунке точки представляют собой значения средней грани, найденные методом Монте-Карло.

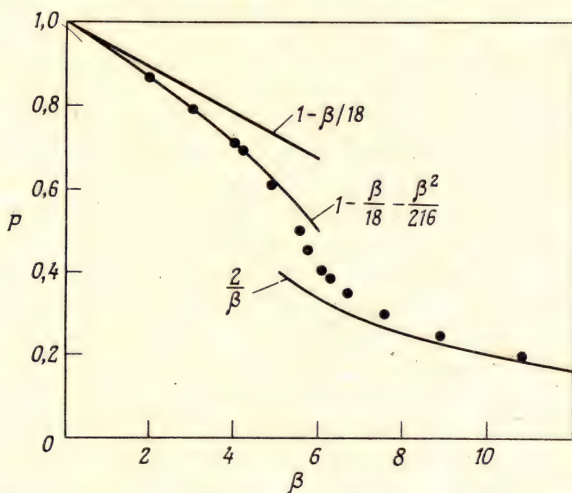


Рис. 11.1. Средняя грань для решеточной калибровочной теории с группой $SU(3)$. Сплошные кривые — первые приближения в режимах сильной и слабой связи, точки получены при анализе решеток 4^4 и 6^4 методом Монте-Карло.

Упражнения

1. Покажите, что в режиме слабой связи параметр b_3 , введенный в гл. 10, ведет себя следующим образом:

$$b_3(\beta) = 3(1 - 4/\beta + O(\beta^2)).$$

2. Как ведет себя в лидирующем приближении предела слабой связи средняя грань в Z_2 -решеточной калибровочной теории?

Перенормировка и непрерывный предел

Рассматривая введение решетки как способ обрезания ультрафиолетовых расходимостей, в конечном счете необходимо перейти к непрерывному пределу. Как и при снятии любой регуляризации наблюдаемые величины должны стремиться к их физическим значениям. Однако размерные величины, например массы, вычисляются в решеточном подходе в единицах шага решетки a . Например, масса первого возбужденного состояния в единицах a определяет корреляционную длину:

$$\xi = (ma)^{-1}. \quad (12.1)$$

В непрерывном пределе $a \rightarrow 0$ величина m должна оставаться конечной. Поэтому мы заинтересованы в получении бесконечной корреляционной длины. На языке статистической механики такое поведение ожидается при фазовом переходе второго рода. Для того чтобы перейти к непрерывному пределу решеточной теории, необходимо найти в параметрическом пространстве точки, в которых соответствующая статистическая модель имеет критическое поведение. В области сильной связи критического поведения нет: из (10.23) видно, что корреляционная длина стремится к нулю, когда β становится малым. Поэтому для перехода к непрерывному пределу необходимо искать фазовые переходы второго рода при промежуточных или малых значениях константы связи.

Поскольку мы начинаем обсуждение вопроса о снятии ультрафиолетового обрезания, возникает вопрос о перенормировке. Как известно, в квантовой теории поля имеются расходимости, которые должны быть устранены при вычислении физических величин. Голые заряды и массы, входящие в лагранжиан, не являются хорошо определенными величинами и требуют перенормировки; они приобретают зависимость от параметра обрезания, которая обуславливает конечный предел физических величин при снятии регуляризации. В случае хорошо определенной перенормируемой теории эта процедура должна приводить к конечным однозначно определенным значениям для всех физических величин.

Существует большое число схем перенормировки. В квантовой электродинамике, например, обычно фиксируют физическую массу электрона и коэффициент перед дальнедействующим кулоновским потенциалом. Эти параметры непрерывной теории определяют

голую массу и голый заряд регуляризованной теории. В случае теории с конфайнментом, а таковой должна быть теория сильных взаимодействий, выбор менее очевиден. В пертурбативном анализе чисто калибровочной теории без фермионов часто выбирается коэффициент пропорциональности K , фигурирующий в законе площадей для вильсоновской петли и совпадающий с коэффициентом перед линейно растущим членом в потенциале взаимодействия между двумя статическими источниками с квантовыми числами кварков. Другой возможный способ выбора схемы перенормировки — фиксация массы m какого-либо физического связанного состояния, например, массы самого легкого глюоболла.

Все величины, рассмотренные в предыдущем абзаце, определяются с помощью эффектов, связанных с большими расстояниями. Это естественно для случая дальнедействующих потенциалов, но то же относится и к массе частиц, поскольку она определяет пространство частицы на больших расстояниях. Но часто удобно рассматривать физические наблюдаемые, связанные с конечным масштабом расстояний. Например, в традиционном ренормгрупповом подходе часто рассматриваются вершинные функции, все внешние импульсы которых фиксированы некоторым масштабным фактором μ , имеющим размерность импульса. Равным образом можно задавать силу взаимодействия на конечном расстоянии r . Варьируя параметры μ или r , можно изучать взаимосвязь физических явлений на различных масштабах.

Ограничим пока наше рассмотрение чисто калибровочной теорией без полей материи, в которой имеется только один безразмерный голый параметр g_0 . В общем случае физическая наблюдаемая H является функцией голой константы g_0 , шага решетки a и некоторого расстояния r :

$$H = H(r, a, g_0(a)). \quad (12.2)$$

Здесь явно показана зависимость голой константы от шага решетки: $g_0 = g_0(a)$. Точный вид этой зависимости зависит от выбора конкретной перенормировочной схемы. Для простоты будем считать H безразмерной величиной; если это не так, мы можем сделать H безразмерной путем умножения на соответствующую степень r . Например, если F — сила взаимодействия между частицами, то H определяется как $H = r^2 F$.

По мере того как a стремится к нулю и мы переходим к непрерывному пределу, H должна стремиться к некоторому физическому значению, не зависящему от шага решетки, сохраняя нетривиальную зависимость от r . Но это возможно только при специальных значениях g_0 , при которых имеет место критическое поведение, свя-

занное с корреляциями на различных расстояниях. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Пусть шаг решетки a меняется в два раза. При достаточно малом a значение H не изменится заметно при условии, что g_0 исправлено соответствующим образом:

$$H(r, \tfrac{1}{2}a, g_0(\tfrac{1}{2}a)) = H(r, a, g_0(a)) + O(a^2). \quad (12.3)$$

В общем случае имеется два класса размерных параметров, фиксирующих шкалу для поправок порядка a^2 в этом соотношении. Во-первых, это, конечно, расстояние r , фигурирующее в определении H . Но кроме того следует ожидать появления «дальних» параметров, характеризующих непрерывную теорию. В частности, независимо от того, как велико r , должны появиться поправки вида $a^2 m^2$, где m — некоторая характерная масса в спектре физических частиц. Можно ожидать, что решеточная теория будет хорошим приближением к непрерывной теории, если шаг решетки будет существенно меньше как масштаба r , так и типичных размеров взаимодействующей частицы. Безусловно, можно выбрать такую схему перенормировки, в которой величина $H(r, a, g_0(a))$ фиксирована при данном r , тогда поправки в равенстве (12.3) будут отсутствовать по определению. Но поскольку мы будем варьировать r , чтобы сравнивать физику на разных масштабах, то эти поправки в принципе существуют.

В силу безразмерности H мы можем одновременно изменить r и a в (12.3) вдвое, что дает

$$H(2r, a, g_0(\tfrac{1}{2}a)) = H(r, a, g_0(a)) + O(a^2). \quad (12.4)$$

Это соотношение устанавливает связь между голой константой связи для двух значений a и значением наблюдаемой при разных значениях масштаба r . Повторяя рассуждения, приведшие к выводу равенства (12.4), получаем основное соотношение

$$H(2r, a, g_0(a/2^{n+1})) = H(r, a, g_0(a/2^n)) + O(a^2). \quad (12.5)$$

Соотношение (12.5) позволяет исследовать перенормировку константы g_0 . Предположим, что для некоторых фиксированных r и a мы знаем функциональную зависимость $H(r, a, g_0)$ и $H(2r, a, g_0)$ от голой константы связи g_0 . Предположим далее, что при некотором значении r непрерывный предел H есть H_0 :

$$\lim_{a \rightarrow 0} H(r, a, g_0(a)) = H_0. \quad (12.6)$$

Построим зависимость $H(r, a, g_0)$ от g_0 . Считая a достаточно малым, найдем такое значение $g_0(a)$, при котором $H(r, a, g_0) = H_0$. Далее, используя равенство (12.4), определим с помощью $H(2r, a, g_0)$

величину $g_0(a/2)$ как решение уравнения

$$H(2r, a, g_0(\frac{1}{2}a)) = H_0. \quad (12.7)$$

Определив таким образом $g_0(a/2)$, найдем величину H_1 :

$$H_1 = H(r, a, g_0(\frac{1}{2}a)). \quad (12.8)$$

С помощью (12.5) найдем $g_0(a/4)$, решая уравнение

$$H(2r, a, g_0(\frac{1}{4}a)) = H_1. \quad (12.9)$$

Наконец, итерируя, получим

$$H_n = H(r, a, g_0(a/2^n)), \quad (12.10)$$

$$H(2r, a, g_0(a/2^{n+1})) = H_n. \quad (12.11)$$

На рис. 12.1 эта «лестничная» процедура изображена для случая асимптотически свободной теории с $g_0(0) = 0$.

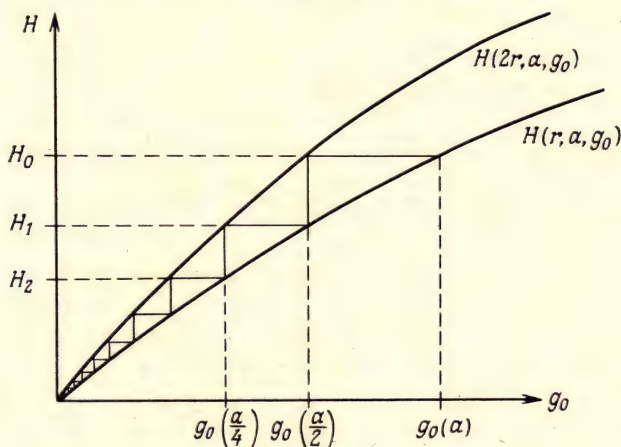


Рис. 12.1. Лестничное построение для асимптотически свободной теории [51].

На рис. 12.2 представлен случай, когда кривые для $H(r, a, g_0(a))$ и $H(2r, a, g_0)$ пересекаются не в нулевой точке, а в некоторой произвольной точке g_F . В этом случае лестничная процедура асимптотически приближается к этой точке (неподвижной точке ренормгруппы), где физика становится масштабно инвариантной:

$$H(r, a, g_F) = H(2r, a, g_F). \quad (12.12)$$

Заметим, что предельное значение g_F достигается независимо от того, с какой стороны от g_F (справа или слева) выбрано начальное

значение g_0 . Когда голый заряд при некотором очень малом значении параметра обрезания проходит через g_F , соответствующие начальные значения H_0 резко меняются при переходе от «лестницы» с одной стороны от g_F к «лестнице» с другой стороны. Крупномасштабное поведение зависит неаналитически от g_0 , что соответствует фазовому переходу в статистической системе. Критические индексы связаны с относительными наклонами кривых $H(r, a, g_0)$ и

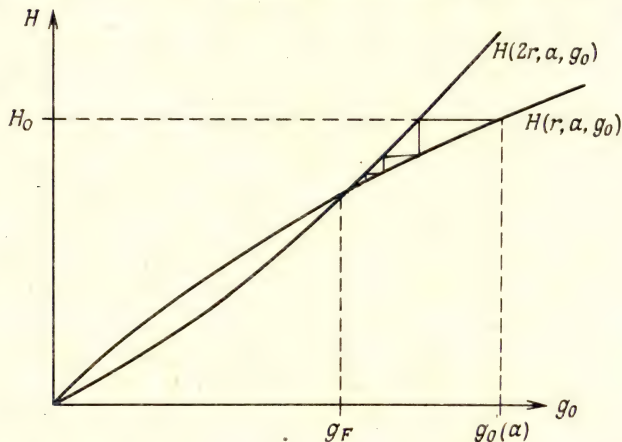


Рис. 12.2. Пример нетривиальной фиксированной точки [51].

$H(2r, a, g_0)$ вблизи критической точки. Сами наклоны этих функций зависят от начального значения a/r , использованного при их определении.

В приведенных выше примерах фигурировали ультрафиолетово стабильные неподвижные точки. Но возможна ситуация, когда в некоторой точке g_F равенство (12.12) также имеет место, но в то же время

$$(|(d/dg) H(r, a, g)| - |(d/dg) H(2r, a, g)|)|_{g=g_F} > 0. \quad (12.13)$$

В этом случае лестничная процедура уводит от точки g_F . Непрерывный предел в такой нестабильной фиксированной точке достигим только в том случае, когда g_0 точно выбрана равной g_F .

Возможен также случай, когда на каком-то этапе ренормализационной процедуры уравнение (12.11) не имеет решения (рис. 12.3). При этом становится невозможным сохранение желаемого значения H ни при каком значении g_0 . Некоторые авторы [7, 78, 117] полагают, что, возможно, именно такая ситуация имеет место для теории ϕ^4 , которая, таким образом, не имеет нетривиального непрерывного предела.

Обсуждавшаяся выше итерационная процедура представляет собой упрощенный вариант аналогичной процедуры для теорий с несколькими константами взаимодействия, рассмотренной Вильсоном [177, 178]. В физике элементарных частиц нас обычно интересует непрерывный предел теории, определяемой с помощью нескольких перенормированных констант. В случае же статистической механики мы часто придерживаемся обратной последовательности действий, а именно исходим из простой модели при очень

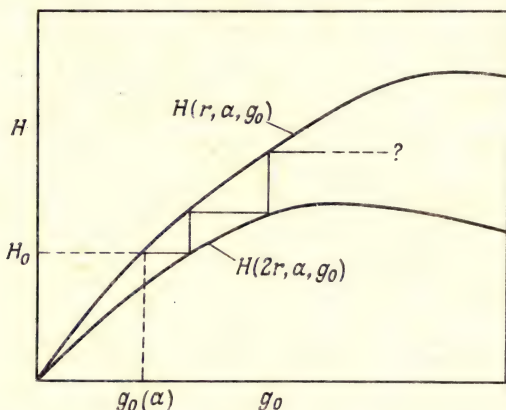


Рис. 12.3. Теория, не имеющая нетривиального непрерывного предела.

малых значениях шага решетки a и затем ищем эффективную теорию, соответствующую большему шагу решетки, но дающую эквивалентное описание на больших расстояниях. При этом обычно число параметров растет при выполнении итерационной процедуры.

Изложенное выше рассмотрение зависимости голой константы связи от параметра обрезания можно сформулировать в дифференциальной форме. Если мы используем перенормировочную процедуру, в которой величина H полагается равной H_0 при некотором значении r и при всех a , то легко получить уравнение

$$a(d/da)H(r, a, g_0(a)) = 0 \\ = a(\partial/\partial a)H(r, a, g_0) + \gamma(g_0)(\partial/\partial g_0)H(r, a, g_0). \quad (12.14)$$

Это известный вид уравнений ренормгруппы [81, 153]. Ренормгрупповая функция $\gamma(g_0)$ определяется как ¹⁾

¹⁾ Соотношение (12.15) можно рассматривать как уравнение характеристики для (12.14). Дифференциальные групповые уравнения вида (12.15) впервые были получены и использованы в работах [193, 194], а дифференциальные уравнения в частных производных — в работе [195]. В современной литературе функцию γ , взятую с обратным знаком, обычно называют бета-функцией: $\beta(g) = -\gamma(g)$. — Прим. ред.

$$\gamma(g_0) = a(d/da)g_0(a). \quad (12.15)$$

Знание $\gamma(g_0)$ позволяет определить зависимость голой константы связи g_0 от параметра обрезания a с точностью до некоторой постоянной интегрирования. Отметим, что после того как мы определили процедуру перенормировки, g_0 и a перестают быть независимыми параметрами; мы можем выразить g_0 как функцию a или наоборот a как функцию g_0 . Эта взаимосвязь между размерным и безразмерным параметрами лежит в основе явления размерной трансмутации, которому посвящена следующая глава.

Нули ренормгрупповой функции $\gamma(g_0)$ соответствуют точкам пересечения, обсуждавшимся выше. В пределе малых значений шага решетки голая константа связи стремится к неподвижной точке:

$$\lim_{a \rightarrow 0} g_0(a) = g_F. \quad (12.16)$$

При этом из (12.15) следует

$$\gamma(g_F) = 0. \quad (12.17)$$

Заметим далее, что для значений g_0 , близких к g_F , имеем

$$\gamma(g_0) = a(d/da)g_0(a) \begin{cases} > 0, g_0 > g_F \\ < 0, g_0 < g_F. \end{cases} \quad (12.18)$$

Таким образом, для ультрафиолетово стабильной фиксированной точки, которая здесь рассматривается, первая неисчезающая производная γ должна быть положительной.

В общем случае вид γ зависит от выбора схемы перенормировки. В частности, γ зависит от выбора наблюдаемой H и r . Тем не менее, нули γ -функции, определяющие стабильные фиксированные точки, должны быть универсальными, если теория имеет единственный непрерывный предел. Схемную зависимость ренормгрупповой функции можно увидеть уже в пределе сильной связи. Рассмотрим сначала перенормировочную схему, в которой фиксировано натяжение струны. Из равенства (10.9) в случае группы $SU(3)$ получим выражение

$$K = a^{-2} \log(3g_0^2(a)) + O(g_0^{-2}). \quad (12.19)$$

Если K не зависит от a , то для производной получаем

$$0 = a(d/da)K = -2K + (2/(a^2 g_0))\gamma(g_0) + \dots \quad (12.20)$$

Используя (12.19) для исключения a^2 , находим

$$\gamma(g_0) = g_0 \log(3g_0^2) + \dots \quad (12.21)$$

Отметим, что это выражение не обращается в нуль при больших значениях константы связи g_0 ; это значит, что непрерывный предел следует искать при каких-то других значениях g_0 .

Предположим теперь, что перенормировочная схема определяется фиксированием не натяжения струны, а массовой щели m_g . Из (10.23) следует

$$m_g = a^{-1} 4 \log(3g_0^2) + O(g_0^{-2}). \quad (12.22)$$

По аналогии с (12.19)—(12.21) находим

$$0 = a(d/da) m_g = -m_g + (8/(ag_0)) \gamma(g_0) + \dots, \quad (12.23)$$

$$\gamma(g_0) = \frac{1}{2} g_0 \log(3g_0^2) + \dots. \quad (12.24)$$

Заметим, что выражения (12.21) и (12.24) приводят к различным значениям для ренормгрупповой функции γ . При тех значениях константы g_0 , при которых мы находимся вдали от нулей ренормгрупповой функции γ , шаг решетки нельзя считать малым. Это влияет на соотношения между наблюдаемыми величинами и может проявляться как схемная зависимость ренормгрупповых функций.

Упражнения

1. Каков физический смысл изменения начальной величины H_0 в уравнении (12.7)?

2. Предположим, что вблизи фиксированной точки g_F ренормгрупповая функция γ расходится следующим образом: $\gamma(g_0) = (g_0 - g_F)\lambda + O((g_0 - g_F)^2)$. Покажите, что корреляционная длина при $g_0 \sim g_F$ расходится как $\xi \sim (g_0 - g_F)^{-1/\lambda}$.

Асимптотическая свобода и размерная трансмутация

В этой главе мы вернемся к пределу слабой связи в неабелевых калибровочных теориях. На уровне древесных фейнмановских диаграмм релятивистская теория поля не имеет расходимостей и не нуждается в перенормировке. Зависимость от параметра обрезания появляется только после учета однопетлевых диаграмм. Отсюда следует, что в предельном случае нашей калибровочной теории для кварков и глюонов, каким является теория возмущений, имеем

$$\gamma(g_0) = O(g_0^3). \quad (13.1)$$

С самого начала мы знаем, что ренормгрупповая функция γ имеет нуль при g_0 , равном нулю. Для того, чтобы эта фиксированная точка была стабильной и, следовательно, могла использоваться в качестве непрерывного предела, необходимо, чтобы коэффициент перед g_0^3 в (13.1) был положительным. Впервые этот коэффициент был вычислен в работах [87, 88, 154] для случая неабелевых калибровочных теорий. Определяя коэффициенты разложения γ_0 и γ_1 для асимптотического разложения

$$\gamma(g_0) = \gamma_0 g_0^3 + \gamma_1 g_0^5 + O(g_0^7), \quad (13.2)$$

для случая калибровочной теории с симметрией $SU(n)$ имеем

$$\gamma_0 = (1/16\pi^2)(11n/3 - 2n_f/3), \quad (13.3)$$

где n_f — число сортов кварков. Таким образом, если

$$n_f < 11n/2, \quad (13.4)$$

то фиксированная точка в начале координат потенциально соответствует непрерывному пределу. Двухпетлевой вклад [37, 102] равен ¹⁾

$$\gamma_1 = (1/16\pi^2)^2(34n^2/3 - 10nn_f/3 - n_f(n^2 - 1)/n). \quad (13.5)$$

Хотя в общем случае функция $\gamma(g_0)$ зависит от выбора перенормировочной схемы, но первые два члена разложения одинаковы во всех схемах. Рассмотрим две различные схемы, и пусть $g_0(a)$ и $g'_0(a)$ — значения голых констант в этих двух схемах. В пределе сла-

¹⁾ Трехпетлевой вклад в γ -функцию вычислен в работе [196]. — Прим. ред.

бой связи оба случая сводятся к классической янг-миллсовской теории, так что низшие порядки должны совпадать:

$$\left. \begin{aligned} g'_0 &= g_0 + cg_0^3 + O(g_0^5), \\ \overline{g}_0 &= g'_0 - cg_0'^3 + O(g_0'^5). \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

Вычислим теперь новую ренормгрупповую функцию

$$\begin{aligned} \gamma'(g'_0) &= a(d/da)g'_0 = (\partial g'_0/\partial g_0)\gamma(g_0) = \\ &= (1 + 3cg_0^2)(\gamma_0 g_0^3 + \gamma_1 g_0^5) + O(g_0^7) = \\ &= \gamma_0 g_0'^3 + \gamma_1 g_0'^5 + O(g_0'^7). \end{aligned} \quad (13.7)$$

Видно, что зависимость от параметра c отсутствует.

До сих пор мы рассматривали ренормализационную группу в терминах голого заряда, зависящего от параметра обрезания. Это обычная процедура в теории на решетке, но ренормализационная группа применима и в непрерывной теории, если определить конечную перенормированную константу связи. Подобно функции H , обсуждавшейся в гл. 12, перенормированная константа связи сама является величиной, остающейся конечной в непрерывном пределе:

$$\lim_{a \rightarrow 0} g_R(r, a, g_0(a)) = g_R(r). \quad (13.8)$$

В общем случае g_R зависит от r , причем массы и радиусы физических частиц определяют характерные масштабы этой зависимости. Кроме того, из соответствия с классической теорией следует, что g_R должна быть нормирована так, чтобы в низшем порядке теории возмущений она сводилась к голой константе связи:

$$g_R(r, a, g_0) = g_0 + O(g_0^3). \quad (13.9)$$

В остальном определение величины g_R совершенно произвольно. Например, если некоторая физическая величина H может быть представлена в виде ряда

$$H(r, a, g_0) = h_0 + h_1 g_0^2 + O(g_0^4), \quad (13.10)$$

то можно определить перенормированную константу следующим образом:

$$g_H^2(r) = (H - h_0)/h_1. \quad (13.11)$$

В пертурбативном подходе часто используют перенормированную трехглюонную вершину, все внешние импульсы которой имеют фиксированное значение, равное обратному значению радиуса r^{-1} , при фиксированной калибровке.

В непрерывном пределе можно рассматривать физические наб-

людаемые H как функции g_R . Тогда выражение для H принимает вид

$$H(r, r', g_R(r')) = h_0 + h_1 g_R^2 + O(g_R^4). \quad (13.12)$$

где r — масштаб, входящий в определение H , а r' — масштаб, входящий в определение g_R . Коэффициенты разложения в (13.10) и в (13.12), вообще говоря, различны, но в первом и во втором порядке они совпадают. Очевидно, что наблюдаемые физические величины не должны зависеть от вспомогательной величины r' . Отсюда легко получить обычное дифференциальное уравнение ренормгруппы

$$r'(d/dr') H(r, r', g_R(r')) = 0 = r'(\partial/\partial r') H + \gamma_R(g_R) H, \quad (13.13)$$

где введена перенормированная ренормгрупповая функция

$$\gamma_R(g_R) = r(d/dr) g_R(r). \quad (13.14)$$

Можно установить связь между этой ренормгрупповой функцией и функцией (12.18). При снятом обрезании g_R есть функция r, a, g_0 : $g_R = g_R(r, a, g_0)$. Однако в силу безразмерности g_R она может зависеть только от отношения r и a . Отсюда сразу же следует

$$r(\partial/\partial r) g_R = -a(\partial/\partial a) g_R. \quad (13.15)$$

В силу того что в непрерывном пределе величина g_R должна зависеть только от r , а $a \rightarrow 0$, мы получаем

$$a(\partial g_R/\partial a) + (\partial g_R/\partial g_0) a(\partial g_0/\partial a) = 0. \quad (13.16)$$

В результате, используя полученные соотношения, аналогично (13.7) получаем

$$\gamma_R(g_R) = \gamma_0 g_R^3 + \gamma_1 g_R^5 + O(g_R^7). \quad (13.17)$$

Перенормированная и голая ренормгрупповые γ -функции имеют одинаковые первые два коэффициента разложения. Впервые γ_0 и γ_1 были вычислены для перенормированной γ -функции.

За пределами теории возмущений нет такой простой связи между голой и перенормированной γ -функциями. Неудачное определение g_R может привести к появлению нуля у γ_R (см. упражнение 1), тогда как у голой γ -функции нулей нет.

Вычисление γ_R с помощью ряда теории возмущений оказывается весьма плодотворным. Если непрерывный предел имеет место при $g_0 = 0$ и если g_R достаточно мало, так что достаточно ограничиться двумя первыми членами разложения (13.17), то перенормированная константа сама стремится к нулю при $r \rightarrow 0$. Таким образом, не только голая константа связи, но и эффективная констан-

та на малых расстояниях обращается в нуль. В этом заключается физическое содержание понятия асимптотическая свобода; явления, связанные с взаимодействиями только на малых расстояниях, могут быть описаны точно с помощью разложения в ряд теории возмущений. В теории сильных взаимодействий асимптотически свободные калибровочные теории были привлечены для объяснения практически свободного поведения партонов, проявляющегося в структурных функциях глубокоэластичного рассеяния лептонов на адронах.

Вернемся к голой ренормгрупповой функции ¹⁾ и исследуем, как быстро уменьшается g_0 с убыванием шага решетки. Разделяя переменные, находим

$$\frac{dg_0}{\gamma_0 g_0^3 + \gamma_1 g_0^5 + O(g_0^7)} = d(\log a), \quad (13.18)$$

Интегрируя (13.18), получаем

$$g_0^{-2} = \gamma_0 \log(a^{-2} \Lambda_0^{-2}) + (\gamma_1/\gamma_0) \log(\log(a^{-2} \Lambda_0^{-2}) + O(g_0^2)). \quad (13.19)$$

Здесь Λ_0 — постоянная интегрирования; индекс нуль указывает на то, что Λ_0 определяется с помощью голой константы g_0 при решеточном вильсоновском обрезании. В случае перенормированной константы g_R вместо a будет фигурировать r и вместо Λ_0 — другая постоянная интегрирования Λ_R . Постоянная, возникшая при интегрировании уравнения ренормгруппы, задает шкалу в теории сильных взаимодействий. Ее величина зависит от выбранной схемы перенормировки, как легко можно видеть, рассматривая две различные константы g_0 и g'_0 , определенные в разных схемах и связанные между собой соотношением типа (13.6). Используя аналог (13.19), получаем

$$\log(\Lambda_0'^2/\Lambda_0^2) = c/\gamma_0, \quad (13.20)$$

где c — параметр, входящий в (13.6). Таким образом, в рамках теории возмущений можно связать между собой параметры Λ_0 для двух различных схем. Причем, чтобы сделать это, достаточно провести вычисления только на уровне одной петли.

Впервые эти вычисления были проведены в работе [96]. В этой работе перенормированная константа определялась с помощью трехглюонной вершины в фейнмановской калибровке, квадраты внешних импульсов которой полагались равными $\mu^2 = r^{-2}$. В результате было получено Λ_R/Λ_0 :

$$\Lambda_R/\Lambda_0 = \begin{cases} 57,5 & \text{для группы } SU(2) \\ 83,5 & \text{для группы } SU(3) \end{cases} \quad (13.21)$$

¹⁾ См. уравнение (12.15) и примечание на с. 103. — *Прим. ред.*

для калибровочной теории без фермионов. Параметр Λ является схемно зависимой величиной, причем его значения могут различаться во много раз. Первоначальные расчеты были довольно сложными и включали промежуточные определения констант связи и вычисление однопетлевых диаграмм в рамках решеточной регуляризации. Они были повторены [59] с помощью более эффективного вычислительного метода, основанного на исследовании квантовых флуктуаций вокруг медленно меняющегося классического фонового поля. В работах [107, 176] производились аналогичные вычисления для решеточных теорий с невилсоновским действием, а также с учетом фермионов.

До сих пор мы рассматривали голую константу как функцию шага решетки. Равным образом можно рассматривать шаг решетки как функцию голой константы. Из равенства (13.19) получаем

$$a = \Lambda_0^{-1} (g_0^2 \gamma_0)^{-\gamma_1/(2\gamma_0^2)} \exp(-1/(2\gamma_0 g_0^2)) (1 + O(g_0^2)). \quad (13.22)$$

Заметим, что a как функция g_0 имеет существенно неаналитическое поведение по g_0 вблизи нуля. Можно сказать, что пертурбативная ренормгруппа дает нам непертурбативную информацию. Умножая (13.22) на массу, мы можем получить выражение для корреляционной длины в пределе слабой связи

$$ma = \xi^{-1} = (m/\Lambda_0) (g_0^2 \gamma_0)^{-\gamma_1/(2\gamma_0^2)} \exp(-1/(2\gamma_0 g_0^2)) (1 + O(g_0^2)). \quad (13.23)$$

Если m — масса физической частицы и, следовательно, конечная величина в непрерывном пределе, то ее значение в единицах Λ_0 определяется множителем в выражении (13.23).

Можно было выбрать для работы корреляционную длину между операторами с определенными квантовыми числами, такими, как спин, четность и т. п. Таким образом, все размерные величины можно выразить через единственный размерный параметр Λ_0 . Величина Λ_0 есть универсальный параметр, зависящий только от выбранной схемы перенормировки. Безразмерные отношения масс, вычисляемые в теории, не зависят от Λ_0 . Можно сказать, что в чисто калибровочной теории нет свободных параметров. Параметр обрезания входит в величину g_0 , а величину g_0 в свою очередь можно определить с помощью (13.23). Таким образом, остается единственный параметр Λ_0 , который задает шкалу масс. Иногда удобно положить Λ_0 равным единице, если не возникает необходимости сравнивать результаты вычислений с экспериментальными значениями. Коулмен и Вайнберг назвали это явление, когда безразмерная константа g_0 и размерная величина a исключаются из теории, а шкала масс задается единственным размерным параметром Λ_0 , размерной трансмутацией [41].

Если в теории есть кварки, то их массы также являются параметрами. В действительности это единственные параметры в теории сильных взаимодействий. Если считать голые массы кварков равными нулю (так называемый киральный предел теории), то мы приходим к теории без параметров (не считая Λ_0). В киральном пределе масса пиона равна нулю, и все безразмерные величины должны однозначно определяться в теории. Это относится не только к отношению масс, например массы ρ -мезона к массе протона, но и к таким величинам как константа пион-нуклонного взаимодействия, некогда рассматривавшаяся как параметр в теории возмущений. Поскольку киральное приближение довольно успешно использовалось в алгебре токов, есть основания полагать, что можно будет развить разумную вычислительную схему. Если удастся добиться качественного согласия в киральном пределе, то, подбирая соответствующим образом массы кварков, можно получить правильное значение массы пиона и завершить построение теории.

До сих пор идею построения теории без свободных параметров не удавалось реализовать в рамках электродинамики или теории слабых взаимодействий, где всегда константа взаимодействия входила как параметр (например постоянная тонкой структуры $\alpha \approx 1/137$). Можно надеяться, что в конце концов удастся развить непертурбативный подход для теорий, объединяющих различные взаимодействия, и включить в число вычисляемых величин постоянную тонкой структуры, массы лептонов и кварков.

Ренормгруппа оказывается весьма мощным инструментом вычислений. Мы затронули только некоторые ее приложения, которые окажутся полезными в следующих главах. Самым замечательным результатом данной главы является, пожалуй, то, что пертурбативное вычисление ренормгрупповых функций позволяет сделать важные непертурбативные заключения, например (13.23).

Упражнения

1. Определим $g_R^2(r)$ как произведение r^2 на силу взаимодействия между двумя кварками, находящимися на расстоянии r .

Покажите, что соответствующая ренормгрупповая функция в полной теории сильных взаимодействий, включающей кварковые петли, должна иметь нуль при ненулевом значении g_R .

2. Покажите, что член с γ_1 в уравнении (13.19) необходим для корректного определения Λ_0 .

Теория среднего поля

Как мы видели, явление конфайнмента в решеточной теории естественно возникает в пределе сильной связи. В то же время наличие непрерывного предела с асимптотической свободой связано с пределом слабой связи. Желая сохранить качественные закономерности конфайнмента в непрерывном пределе, хотелось бы в нашем статистическом аналоге иметь плавный переход от высоких температур к низким. Это дает основания надеяться, что в решеточной калибровочной теории с $SU(3)$ -симметрией нет фазовых переходов, разделяющих области сильной и слабой связи.

Есть ли основания ожидать появления фазовых переходов в решеточной калибровочной теории? В одной из последующих глав, посвященной дискретным группам, мы покажем, что фазовые переходы типа конфайнмент — деконфайнмент действительно существуют в некоторых модельных примерах. В этой главе будут приведены некоторые нестрогие соображения, основанные на теории среднего поля, в пользу того, что в некоторых случаях такие фазовые переходы действительно возможны, если размерность пространства-времени достаточно велика. Приближение среднего поля работает тем лучше, чем больше соседей у каждого ребра решетки; следовательно, это приближение более эффективно в пространстве с большей размерностью.

В своем первом, простейшем варианте теория среднего поля применительно к системам с калибровочной симметрией игнорирует теорему Элитцура, о которой говорилось в гл. 9. В этом варианте предполагается, что среднее значение полевой переменной, определенной на ребре, отлично от нуля, и это значение определялось из условия самосогласованности. Но на самом деле это среднее значение должно быть строго равно нулю, поскольку переменная на ребре не является калибровочным инвариантом. В работах [66, 76] метод среднего поля сформулирован как перевальное приближение, что приводит к разложению по обратным степеням пространства-времени; калибровочные вращения, возникающие как нулевые моды, восстанавливают согласие с теоремой Элитцура. Здесь будет изложен наиболее простой вариант теории среднего поля, основанный на работе [12]. В общем случае приближение среднего поля занижает величину температурных флуктуаций; в случае фазовых пе-

реходов второго рода в магнетиках критическая температура оказывается в этом приближении очень сильно завышенной.

Чтобы подчеркнуть различия в предсказаниях для спиновых и калибровочных моделей, покажем сначала, как работает приближение среднего поля на примере модели Изинга. Пусть s_i — спин, определенный в узле i d -мерной гиперкубической решетки, причем s_i может принимать только два значения: $+1$ и -1 . Статистическая сумма Z имеет вид

$$Z = \sum_{\{s\}} \exp(\beta \sum_{\{ij\}} s_i s_j), \quad (14.1)$$

где суммирование в показателе экспоненты проводится по всем парам соседних узлов $\{ij\}$. Нашей целью является нахождение приближенного выражения для намагниченности

$$M = \langle s_i \rangle. \quad (14.2)$$

Выберем какой-либо спин s_i и заменим все соседние спины их средними значениями M . Тогда вероятность того, что спин в узле i имеет значение s_i , равна

$$P(s_i) = \exp(2d\beta M s_i) / (2 \cosh(2d\beta M)), \quad (14.3)$$

где множитель $2d$ связан с числом соседей узла i , а знаменатель нормирует вероятность. Потребовав, чтобы среднее значение $\langle s_i \rangle$ было равно M , мы получим условие самосогласованности

$$M = \tanh(2d\beta M). \quad (14.4)$$

При малых значениях β единственное решение этого уравнения имеет вид $M = 0$. Таким образом, приближение среднего поля правильно предсказывает, что при высоких температурах намагниченность отсутствует. В отличие от этого при больших значениях β , точнее при

$$\beta > \beta_{mf} = 1/(2d), \quad (14.5)$$

уравнение (14.4) имеет также ненулевое решение с $M > 0$ (и сопряженное ему решение с $M < 0$). Графическое решение показано на рис. 14.1. При этом стабильным решением при низких температурах является именно ненулевое решение. Это легко можно увидеть, если решить (14.4) итерациями. Действительно, если выбрать начальное значение M , отличающееся от нуля, то мы придем к ненулевому решению. Таким образом, приближение среднего поля предсказывает наличие фазового перехода при $\beta = \beta_{mf}$, причем при $\beta > \beta_{mf}$ появляется спонтанная намагниченность. В табл. 14.1 при-

ведены для сравнения значения β_{mf} и полученные более точными методами значения обратной критической температуры β_c при различных значениях размерности d [75]. Заметим, что приближение среднего поля всегда дает завышенные значения критической температуры, причем при $d = 1$ в бесконечное число раз, но с ростом размерности d точность улучшается.

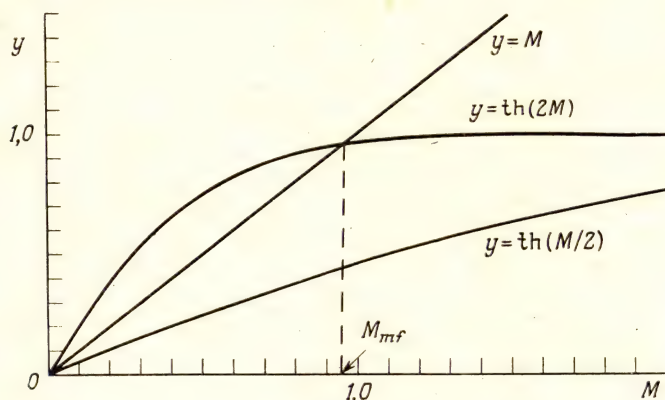


Рис. 14.1. Графическое решение уравнения (14.4) выше и ниже критической точки в теории среднего поля.

Таблица 14.1.

d	β_{mf}	β_c
1	0,500	∞
2	0,250	0,441
3	0,167	0,222
4	0,125	0,150

Этот анализ показывает, что в модели Изинга происходит непрерывный переход при любом числе измерений: при уменьшении β до значения β_{mf} M непрерывным образом убывает до нуля. Это резко отличается от случая калибровочных теорий, где мы имеем как правило скачкообразное изменение параметра порядка в точке фазового перехода. В этом примере сравнительно легко использовать физические соображения, чтобы определить, какое из решений уравнения (14.4) имеет физический смысл. Для того чтобы распространить этот метод на калибровочные теории, воспользуемся вариационным методом в форме, предложенной в работе [151]. А

именно, если $\rho(x)$ есть некоторая нормированная мера

$$\int_X \rho(x) dx = 1, \quad (14.6)$$

то в силу выпуклости экспоненциальной функции мы получим для некоторой произвольной функции $f(x)$

$$\langle e^f \rangle \geq e^{\langle f \rangle}, \quad (14.7)$$

где скобки означают усреднение с мерой $\rho(x)$:

$$\langle f \rangle = \int_X f(x) \rho(x) dx. \quad (14.8)$$

Для того чтобы применить это неравенство к исследованию модели Изинга, прибавим к действию и вычтем из него член с источником:

$$Z = \sum_{\{s\}} \exp \left(\beta \sum_{\{ij\}} s_i s_j + H \sum_i s_i - H \sum_i s_i \right), \quad (14.9)$$

где H играет роль вариационного параметра. Роль меры $\rho(x)$ играет фактор

$$\int_X \rho(x) f(x) dx \rightarrow \sum_s \exp(H \sum_i s_i) f(s) / (\sum_s \exp(H \sum_i s_i)), \quad (14.10)$$

причем вместо интегрирования, как это было в (14.6)—(14.8), проводится суммирование по спинам $\{s_i\}$. Используя свойство выпуклости, получаем следующее неравенство:

$$Z \geq \exp(N^d (d\beta \tanh^2(H) - H \tanh(H) + \log(2 \cosh(H)))), \quad (14.11)$$

где N^d — число узлов решетки. Для свободной энергии F получаем из (14.11) ограничение

$$\begin{aligned} \beta F &= -N^d \log(Z) \leq \beta F_{mf}(H) \\ &= -d\beta \tanh^2(H) + H \tanh(H) - \log(2 \cosh(H)). \end{aligned} \quad (14.12)$$

Минимизируя правую часть (14.12) по параметру H , уточняем ограничение и получаем уравнение

$$(d/dH) \beta F_{mf} = 0 = \operatorname{sech}^2 H (-2d\beta \tanh H + H). \quad (14.13)$$

Заметим, что уравнение (14.13) полностью эквивалентно уравнению (14.4), если положить $H = 2d\beta M$; при низких температурах именно ненулевое решение этого уравнения минимизирует правую часть неравенства (14.12). На рис. 14.2 показана зависимость свободной энергии в приближении среднего поля от параметра H при трех различных значениях β : $\beta = 1, 1\beta_{mf}, \beta_{mf}/1,1$.

Члены в выражении для свободной энергии среднего поля имеют простую термодинамическую интерпретацию: $-d\beta th^2 H$ — потенциальная энергия, которая стремится придать H ненулевые значения, а член $HthH - \ln(2chH)$ играет роль энтропийного фактора, разупорядочивающего систему. Какой из этих членов будет доминировать, зависит от значения β .

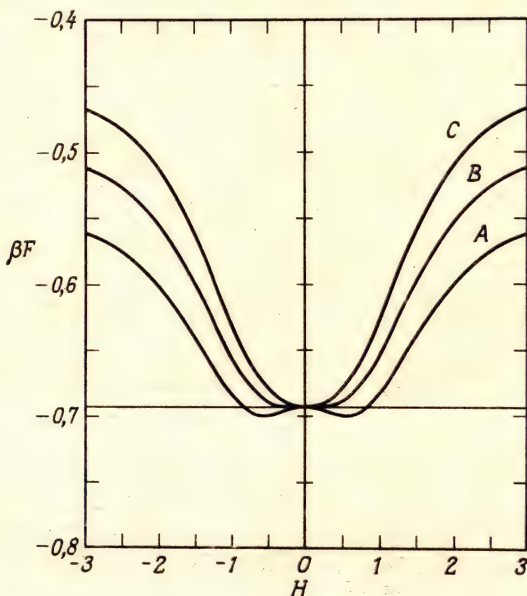


Рис. 14.2. Свободная энергия в теории среднего поля для модели Изинга. Кривые А, В, С соответствуют значениям β на 10% выше β_{mf} , точно равному β_{mf} и на 10% ниже β_{mf} .

Этот формализм можно прямо применить к калибровочным теориям. Рассмотрим чисто $SU(n)$ -симметричную калибровочную теорию, статистическая сумма которой имеет вид

$$Z = \int (dU) \exp \left(\left(\frac{\beta}{n} \right) \sum_{\square} \text{Tr } U_{\square} \right). \quad (14.14)$$

Добавляя и вычитая из действия член $(H/n) \sum_{\{ij\}} \text{Re Tr } U_{ij}$, мы можем использовать меру

$$\int_X \rho(x) f(x) dx \rightarrow \frac{\int (dU) e^{(H/n) \sum \text{Re Tr } U} f(U)}{\int (dU) e^{(H/n) \sum \text{Re Tr } U}} \quad (14.15)$$

в неравенстве, полученном из условия выпуклости. Это приводит к ограничению

$$\begin{aligned}\beta F &= -N^{-d} \log Z \leq \beta F_{mf}(H) = \\ &= -\frac{1}{2}d(d-1)\beta t(H)^4 + dHt(H) - d \log(c(H)),\end{aligned}\quad (14.16)$$

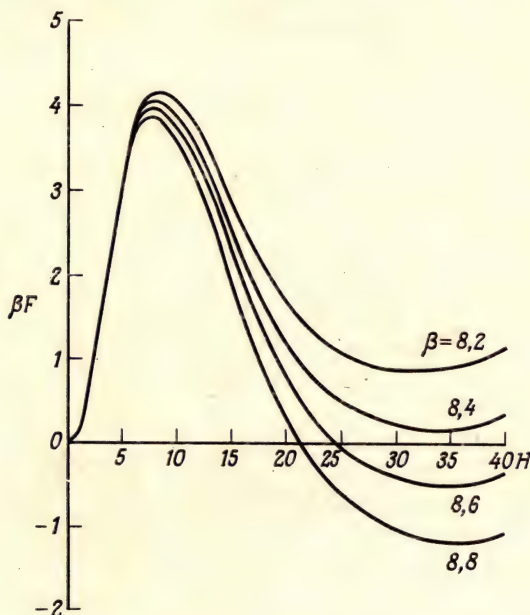


Рис. 14.3. Зависимость свободной энергии в теории среднего поля от H для нескольких значений β в случае группы симметрии $SU(3)$ и размерности $d = 4$.

где использованы обобщения гиперболических функций на произвольные группы

$$c(H) = \int dH e^{(H/n) \text{Re Tr } U}, \quad (14.17)$$

$$t(H) = c(H)^{-1} \int dU \quad n^{-1} \text{Re Tr } U e^{(H/n) \text{Re Tr } U}. \quad (14.18)$$

Множитель $\frac{1}{2}d(d-1)$ в уравнении (14.16) есть число граней на один узел d -мерной решетки. Заметим, что в случае группы $SU(3)$ величина $t(H)$ есть просто параметр $b_3/3$ при $\beta = H$, вычисленный в гл. 10. Дифференцируя F_{mf} по H и приравнявая производную ну-

лю, получаем уравнение

$$(-2d(d-1)\beta t(H)^3 + dH) dt(H)/dH = 0, \quad (14.19)$$

или

$$H = 2(d-1)\beta t(H)^3. \quad (14.20)$$

Функция $t(H)$ обращается в нуль при $H = 0$. Таким образом, $H = 0$ всегда есть решение уравнения (14.20). При больших температурах это единственное решение. При низких температурах появляются и другие корни уравнения, но в отличие от случая модели Изинга F_{mf} всегда имеет локальный минимум в нуле. Вблизи нуля потенциальная энергия ведет себя как H^4 , поэтому при малых H всегда доминирует энтропийное слагаемое. С возрастанием β появляется второй минимум при положительных H . При достаточно больших β этот минимум может быть ниже, чем первый. Видно разительное отличие от системы Изинга — модель предсказывает переходы первого рода со скачком H от нуля до ненулевого значения. На рис. 14.3 дана зависимость свободной энергии от H в приближении среднего поля для $SU(3)$ -теории в четырехмерном пространстве-времени.

Метод среднего поля предсказывает фазовый переход первого рода для всех калибровочных групп. Этому предсказанию следует доверять лишь для больших размерностей пространства-времени. Если аргументы в пользу конфайнмента, полученные в пределе сильной связи, справедливы в асимптотически свободном непрерывном пределе решеточной теории, то четырех измерений недостаточно для использования приближения среднего поля для группы $SU(3)$. В последующих главах мы это покажем. Но в четырех измерениях многие калибровочные группы действительно приводят к фазовым переходам. Улучшенные варианты метода среднего поля дают довольно точные оценки температур перехода [76].

Упражнения

1. Покажите, что в случае спиновой модели типа (14.1) с группой симметрии $Z_3 = \{1, \exp(\pm i2\pi/3)\}$ приближение среднего поля предсказывает фазовый переход первого рода.
2. Докажите неравенство (14.7).

Гамильтонов подход

До сих пор мы рассматривали подход к теории калибровочных полей на решетке, основанный на функциональном интегрировании в евклидовом пространстве-времени. Альтернативный подход, предложенный в работе Когута и Саскинда [115], основан на введении решеточной регуляризации только в трехмерном пространстве, тогда как время остается непрерывной величиной. Используя гамильтонову калибровку $A_0 = 0$, они определили гамильтониан как функцию пространственных компонент калибровочного поля и канонически сопряженных импульсов. Этот подход позволяет также получить разложение по обратной константе связи, представляющее собой приложение квантовомеханической теории возмущений.

В этой главе мы выведем гамильтониан Когута — Саскинда из теории Вильсона, используя метод матрицы переноса, аналогично тому, как это сделано в гл. 3. Рассматриваемый ниже способ вывода позволяет наглядно продемонстрировать эквивалентность этих двух подходов. Выбор одного из них зависит от вкуса и от конкретного рассматриваемого вопроса. В вильсоновской теории симметрия между пространством и временем заложена в явном виде, спектр частиц определяется структурой особенностей функций Грина и налицо простая аналогия со статистической механикой. В подходе Когута — Саскинда мы имеем дело с привычной квантовомеханической системой и гамильтонианом, спектр частиц непосредственно определяется спектром самого гамильтониана, а фазовые переходы связаны с пересечением уровней энергии в пределе бесконечного объема.

Поскольку мы хотим перейти к пределу непрерывного времени в теории Вильсона, введем сначала шаг решетки a_0 во временном направлении, не совпадающий с пространственным шагом решетки a . В результате времениподобные грани и пространственноподобные грани будут отличаться по форме и некоторые детали вывода классического непрерывного предела в гл. 7 должны быть модифицированы. Пространственноподобные и времениподобные грани должны теперь входить в действие с разными коэффициентами:

$$S = -\beta_s \sum_s \text{Tr } U_{\square} - \beta_t \sum_t \text{Tr } U_{\square}, \quad (15.1)$$

где в первой сумме учитываются только пространственноподобные грани, а во второй — только времениподобные грани. Чтобы получить правильный классический предел, необходимо положить

$$\beta_s = 2na_0/(g_0^2 a), \quad (15.2)$$

$$\beta_t = 2na/(g_0^2 a_0), \quad (15.3)$$

где a по-прежнему обозначает шаг решетки в пространственных направлениях. При a_0 , стремящемся к нулю, и фиксированном a β_s стремится к нулю, а β_t — к бесконечности.

Вышесказанное относится к классической теории. В квантовой теории, как мы уже видели, голый заряд зависит от схемы обрезания. В частности, константы β_s и β_t могут соответствовать различным значениям параметра Λ в том смысле, как это обсуждалось в гл. 13. Действительно, если бы мы потребовали совпадения пространственной и временной шкал, то могла бы возникнуть необходимость в перенормировке скорости света [97, 161]. Таким образом, мы вводим две голые константы связи и их геометрическое среднее:

$$\beta_s = 2na_0/(g_s^2 a), \quad (15.4)$$

$$\beta_t = 2na/(g_t^2 a_0), \quad (15.5)$$

$$g_H^2 = g_s g_t. \quad (15.6)$$

Индекс H относится к формулировке с использованием гамильтониана. Для всех голых констант связи в низшем порядке должно выполняться равенство

$$g_s^2 = g_t^2 + O(g_t^4) = g_H^2 + O(g_H^4). \quad (15.7)$$

Вводя в константы связи зависимость от параметра обрезания и переходя к непрерывному пределу в асимптотически свободной фиксированной точке, получаем

$$g_s^2(a)/g_t^2(a) \xrightarrow{a \rightarrow 0} 1. \quad (15.8)$$

Для того чтобы перейти к гамильтонову формализму, необходимо использовать временную калибровку. Полагая все полевые переменные на времениподобных ребрах равными единице, мы видим, что времениподобная грань задает связь между двумя соседними пространственноподобными ребрами. Выделяя временную переменную, переобозначим все узлы с помощью двух индексов i и t , где i задает пространственные координаты, а $a_0 t$ есть время. В этих обозначениях полевые переменные на пространственноподоб-

ных ребрах обозначаются с помощью одного временного индекса и двух пространственных $U_{ij, t}$. Действие для чисто калибровочной теории теперь принимает вид

$$S = -(2a/(g_t^2 a_0)) \sum_{\{ij\}, t} \text{Re Tr}(U_{ij, t+1}^{-1} U_{ij, t}) - (2a_0/(g_s^2 a)) \sum_{\square, t} \text{Re Tr}(U_{\square, t}), \quad (15.9)$$

где во второй сумме производится суммирование по всем пространственноподобным граням и по всем моментам времени.

По аналогии с тем, как это делалось в гл. 3, мы хотим найти гильбертово пространство и оператор T такие, что

$$Z = \int (dU) e^{-S} = \text{Tr } T^N, \quad (15.10)$$

где N — число узлов во временном направлении. При этом подразумеваются периодические граничные условия. Логарифм T позволяет нам определить гамильтониан. Первый член в правой части (15.9) соответствует кинетической энергии, а второй — потенциальной.

Пространство, в котором действует оператор T , представляет собой прямое произведение пространств квадратично интегрируемых на группе функций. Состояние $|\psi\rangle$ этого пространства определяется волновой функцией $\psi(U)$, зависящей от полевых переменных U_{ij} , каждая из которых является элементом группы и соответствует пространственноподобному ребру. Скалярное произведение в этом пространстве определяется следующим образом:

$$\langle \psi' | \psi \rangle = \int (dU) \psi'^+(U) \psi(U). \quad (15.11)$$

Для простоты мы используем те же обозначения, что и в функциональном интеграле, но в (15.11) фигурируют только пространственноподобные переменные. Мы можем разложить состояния из этого пространства по ненормируемому базису $\{|U\rangle\}$, в котором каждое состояние определяется элементами группы U_{ij} , соответствующими пространственноподобным ребрам. Полевые переменные, определенные на ребрах с противоположной ориентацией, не являются независимыми и удовлетворяют следующему условию:

$$U_{ij} = U_{ji}^{-1}. \quad (15.12)$$

Скалярное произведение состояний из этого базиса есть

$$\langle U' | U \rangle = \prod_{\{ij\}} \delta(U'_{ij}, U_{ij}), \quad (15.13)$$

где дельта-функция на группе была введена в гл. 9 (выражение (9.14)). Условие полноты имеет вид

$$1 = \int (dU) |U\rangle \langle U|. \quad (15.14)$$

Произвольное состояние представимо в виде

$$|\psi\rangle = \int (dU) |U\rangle \psi(U). \quad (15.15)$$

Работая в этом гильбертовом пространстве, можно выписать матричный элемент оператора, удовлетворяющего (15.10), в виде

$$\begin{aligned} \langle U' | T | U \rangle &= \exp((2a/(g_t^2 a_0)) \sum_{\{ij\}} \text{Re Tr}(U'_{ij}{}^{-1} U_{ij})) \times \\ &\times \exp((2a_0/(g_s^2 a)) \sum_{\square} \text{Re Tr}(U_{\square})). \end{aligned} \quad (15.16)$$

Аналогично тому, как в квантовой механике мы выразили T через операторы \hat{p} и \hat{x} , так и здесь мы хотели бы выразить T через некоторые простые операторы, действующие в гильбертовом пространстве. Начнем с определения матричных операторов \hat{U}_{ij} и унитарных операторов $R_{ij}(g)$:

$$\hat{U}_{ij} |U\rangle = U_{ij} |U\rangle, \quad (15.17)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{ij}(g) |U\rangle &= |U'\rangle, \\ U'_{ij} &= g U_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (15.18)$$

где g — элемент калибровочной группы, и оператор R_{ij} действует только на ребре (ij) . Оператор \hat{U} полностью аналогичен оператору координаты \hat{x} в случае квантовой механики. Для операторов R_{ij} выполняется групповое свойство

$$R_{ij}(g) R_{ij}(g') = R_{ij}(gg'). \quad (15.19)$$

Эти операторы сдвигают переменные U и, таким образом, связаны с каноническими импульсами, о чем более подробно пойдет речь ниже. В этих переменных матрица переноса T имеет вид

$$\begin{aligned} T &= \left(\prod_{\{ij\}} \int dg R_{ij}(g) \exp((2a/(g_t^2 a_0)) \text{Re Tr } g) \right) \\ &\times \exp((2a_0/(g_s^2 a)) \sum_{\square} \text{Re Tr } \hat{U}_{\square}), \end{aligned} \quad (15.20)$$

где \hat{U}_{\square} — произведение операторов \hat{U}_{ij} , определенных на ребрах, ограничивающих грань \square .

Рассмотрим теперь предел при $a_0 \rightarrow 0$. В этом пределе основной вклад в интеграл (15.20) дают такие значения параметров, при которых групповой элемент g близок к единице. Параметризуем g так, как делалось в гл. 6:

$$g = e^{i\omega^\alpha \lambda^\alpha} = e^{i\omega \cdot \lambda}, \quad (15.21)$$

где

$$\text{Tr}(\lambda^\alpha \lambda^\beta) = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta}, \quad (15.22)$$

$$[\lambda^\alpha, \lambda^\beta] = i f^{\alpha\beta\gamma} \lambda^\gamma. \quad (15.23)$$

Инвариантная групповая мера имеет вид

$$dg = J(\omega) \prod_\alpha d\omega^\alpha. \quad (15.24)$$

Единственное свойство якобиана $J(\omega)$, которое нам понадобится, заключается в том, что в окрестности единичного элемента J есть достаточно гладкая и неисчезающая функция ω , а также

$$J(\omega) = J(-\omega). \quad (15.25)$$

Свойство (15.25) следует из равенства $dg = dg^{-1}$.

Оператор $R_{ij}(g)$ может быть представлен в виде

$$R_{ij}(g) = \exp(i\omega^\alpha l_{ij}^\alpha) = \exp(i\omega \cdot l_{ij}), \quad (15.26)$$

где l_{ij}^α — генераторы группы в данном представлении. В нашем гильбертовом пространстве операторы l_{ij}^α удовлетворяют следующим соотношениям:

$$[l_{ij}^\alpha, l_{ij}^\beta] = i f^{\alpha\beta\gamma} l_{ij}^\gamma, \quad (15.27)$$

$$[l_{ij}^\alpha, \hat{U}_{ij}] = -\lambda^\alpha \hat{U}_{ij}, \quad (15.28)$$

$$[l_{ij}^\alpha, \hat{U}_{ji}] = \hat{U}_{ji} \lambda^\alpha, \quad (15.29)$$

$$[l_{ij}^2, l_{ij}^\alpha] = 0 = [l_{ij}^2, R_{ij}(g)]. \quad (15.30)$$

При этом операторы, соответствующие различным ребрам, коммутируют. В равенстве (15.30) мы ввели квадратичный оператор Казимира

$$l_{ij}^2 = \sum_\alpha l_{ij}^\alpha l_{ij}^\alpha. \quad (15.31)$$

Все эти операторы могут быть выражены через операторы дифференцирования по параметрам группы. Например, в случае группы $U(1) = \{e^{i\theta}\}$ имеется только один генератор $\lambda = 2^{-1/2}$, и

$$l_{ij} = 2^{-1/2} d/d\theta_{ij}. \quad (15.32)$$

Чтобы рассмотреть ребро с противоположным направлением, заметим сначала, что из (15.12) следует

$$\hat{U}_{ij} = \hat{U}_{ji}^\dagger. \quad (15.33)$$

Связь между операторами l_{ij} и l_{ji} следует из

$$\begin{aligned} R_{ji}(g)|U_{ij}\rangle &= |U_{ij}g^{-1}\rangle \\ &= |(U_{ij}g^{-1}U_{ij}^{-1})U_{ij}\rangle \\ &= R_{ij}(U_{ij}g^{-1}U_{ij}^{-1})|U_{ij}\rangle. \end{aligned} \quad (15.34)$$

Отсюда получаем для генераторов

$$l_{ji}^\alpha |U\rangle = -G(U_{ij})^{\alpha\beta} l_{ij}^\beta |U\rangle, \quad (15.35)$$

где $G^{\alpha\beta}(g)$ — присоединенное представление группы

$$g^{-1}\lambda^\alpha g = G(g)^{\alpha\beta}\lambda^\beta. \quad (15.36)$$

В силу вещественности и ортогональности этого представления получаем

$$l_{ij}^2 = l_{ji}^2. \quad (15.37)$$

Таким образом, квадратичный оператор Казимира не зависит от ориентации ребра, с которым он связан.

Вернемся теперь к матрице переноса T . Подставив (15.21), (15.24) и (15.26) в (15.20), получим

$$\begin{aligned} T = & \left(\prod_{\{ij\}} \left(\int_{\alpha} d\omega^\alpha J(\omega) \exp(i l_{ij} \cdot \omega) \exp((2a/(g_t^2 a_0)) \text{Tr} \cos(\omega \cdot \lambda)) \right) \right) \times \\ & \times \exp((2a_0/(g_s^2 a)) \sum_{\square} \text{Re Tr } U_{\square}). \end{aligned} \quad (15.38)$$

В пределе $a_0 \rightarrow 0$ основной вклад в интеграл дают значения ω , при которых функция $\text{Tr} \cos(\omega \cdot \lambda)$ находится вблизи своего максимума. Для унитарных групп этот максимум имеет место всегда при $\omega = 0$. Разложим функцию $\text{Tr} \cos(\omega \cdot \lambda)$ в ряд вблизи этой точки:

$$\text{Tr} \cos(\omega \cdot \lambda) = n - \frac{1}{2}\omega^2 + O(\omega^4). \quad (15.39)$$

Подставляя (15.39) в (15.38) и вычисляя гауссов интеграл по $d\omega$, получаем

$$T = K \exp(-a_0 H + O(a_0^2)), \quad (15.40)$$

где K — несущественный постоянный множитель, а H — гамильтониан Когута — Саскинда:

$$H = (g_t/g_s)((g_H^2/(2a)) \sum_{\{ij\}} l_{ij}^2 + (2/(g_H^2 a)) \sum_{\square} \text{Re Tr } \hat{U}_{\square}). \quad (15.41)$$

Оба члена в (15.41) прямо интерпретируются по аналогии с обычным гамильтонианом непрерывной калибровочной теории. Второй член в (15.41) есть сумма по пространственноподобным граням и есть решеточный аналог квадрата магнитного поля. Первый член, включающий канонически сопряженные импульсы, представляет вклад квадрата электрического поля. Действительно, оператор l_{ij} прямо соответствует потоку электрического поля, проходящего через ребро (ij) .

Если в (15.41) убрать фактор g_l/g_s , то гамильтониан будет зависеть лишь от среднего g_H . Заметим, что в соответствии с (15.8) этот фактор стремится к единице при переходе к непрерывному пределу. Таким образом, при вычислении спектра в континууме этим фактором можно пренебречь. Константа g_H связана со своим ренормгрупповым параметром Λ , определяемым аналогично тому, как это делалось в (13.19). Как уже отмечалось выше, связь между ренормгрупповыми параметрами в различных перенормировочных схемах устанавливается с помощью вычислений по теории возмущений. В работе [97] получены значения

$$\Lambda_H/\Lambda_0 = \begin{cases} 0,84 & \text{для группы } SU(2), \\ 0,91 & \text{для группы } SU(3). \end{cases} \quad (15.42)$$

Определенный выше гамильтониан обладает симметрией благодаря остающейся в теории калибровочной свободе. Поскольку мы использовали гамильтонову калибровку, можно производить калибровочные преобразования, не зависящие от времени. Оператор, производящий калибровочные преобразования в пространственном узле i , есть

$$J_i(g) = \prod_{\{ij\} \ni i} R_{ij}(g), \quad (15.43)$$

где произведение берется по всем ребрам, выходящим из узла i . Оператор симметрии $J_i(g)$ коммутирует с гамильтонианом H . Все физические состояния должны быть синглетами калибровочной группы, т. е.

$$J_i(g)|\psi\rangle = |\psi\rangle. \quad (15.44)$$

На языке генераторов l_{ij} это означает, что

$$\sum_{\{ij\} \ni i} l_{ij}^z |\psi\rangle = 0. \quad (15.45)$$

Из этого равенства следует, что полный электрический поток, выходящий из данного узла i , равен нулю. Таким образом, мы прихо-

дим к решеточному варианту закона Гаусса. Мы также могли изучать внешние источники, полагая, что некоторые узлы не являются синглетами. Заметим, что подсчет числа степеней свободы можно производить и до перехода к непрерывному пределу. Закон Гаусса позволяет исключить одну степень свободы калибровочного поля из числа независимых в каждом узле. Другую степень свободы исключает условие калибровки. Таким образом, мы получаем, что калибровочное поле имеет только две степени свободы, как и должно быть.

Гамильтонов подход позволяет легко развить разложение по обратной константе в пределе сильной связи. Когда g_H велико, в гамильтониане доминирует вклад электрического поля. Кинетический член в гамильтониане диагонализуются, если каждое ребро находится в синглетном состоянии с $\hat{P}_{ij} = 0$. Естественный базис в случае разложения по обратной константе связи может быть построен с помощью представлений калибровочной группы для каждого ребра. Потенциальный, или магнитный, член в гамильтониане играет роль возмущения, переводящего каждое ребро из основного состояния в возбужденное состояние, включающее высшие представления. Первый поправочный член включает возбуждение ребер, ограничивающих единственную грань, которое связано с фундаментальным представлением. Дальнейшие подробности см. в обзоре Когута [112].

В этой главе рассмотрены только чисто калибровочные теории. Легко распространить этот подход на теорию с фермионами или другими полями материи. В случае теории с фермионами опять возникнет проблема удвоения, о которой шла речь в гл. 5, с той лишь разницей, что благодаря тому, что время в гамильтоновом подходе непрерывно, степень «вырождения» будет меньше.

Дискретные группы и дуальность

На дискретной пространственно-временной решетке понятие непрерывности отсутствует. Замечательно, что это дает больше свободы при формулировании калибровочной теории. В то время как нетривиальность классической теории в континууме требует, чтобы калибровочная группа была непрерывной, это не обязательно для вильсоновской теории. Действительно, пусть полевая переменная, определенная на ребре решетки, является элементом некоторой дискретной группы. Простейшей моделью такого рода является модель с группой $Z_2 = \{+1, -1\}$, описывающая калибровочно-инвариантное взаимодействие набора изинговских спинов. Такая модель впервые была предложена Вегнером [171] как пример теории с нетривиальной фазовой структурой, но без локального параметра порядка.

Любопытно то обстоятельство, что хотя классическая теория с дискретной группой симметрии не имеет непрерывного предела, квантовая теория может иметь такой предел. Если система испытывает фазовый переход второго рода в точке, соответствующей нулю ренормгрупповой функции, то можно определить континуальную квантовую теорию поля.

Одно из оснований для исследования моделей с дискретными переменными заключается в том, что такие модели часто гораздо легче поддаются анализу. Например, двумерная модель Изинга является точно решаемой для термодинамических функций, хотя в ней есть нетривиальный ферромагнитный фазовый переход. Исследование моделей с дискретными группами симметрии может помочь в понимании фазовой структуры калибровочных теорий, а также дать возможность апробации новых методов.

В этой главе мы сосредоточимся на циклических группах Z_P , элементы которых есть корни P -й степени из единицы. Эти группы являются абелевыми, и в пределе $P \rightarrow \infty$ группа Z_P переходит в группу $U(1)$. Исследование фазовой структуры модели с $U(1)$ -симметрией весьма существенно, поскольку группа $U(1)$ есть группа симметрии электродинамики. Любая теория, претендующая на объяснение конфайнмента кварков, должна также объяснить, почему в КЭД нет конфайнмента.

Мы будем использовать Z_P -калибровочные модели в четырех измерениях при обсуждении преобразований дуальности. Этот ме-

тод, который активно развивался для спиновых систем [36, 159], позволяет связать области сильной и слабой связи и в некоторых случаях точно определить температуру фазового перехода. При преобразованиях дуальности термодинамические функции модели отображаются на термодинамические функции другой модели, подобной исходной, но имеющей другие константы связи. Сингулярности имеют место либо в парах дуальных точек, либо в особых самодуальных точках. Исторически этот метод впервые был применен к исследованию модели Изинга и позволил точно определить положение критической точки [120]. Обобщение на случай калибровочных теорий проводится непосредственно [13, 118, 185].

Как обычно в калибровочных теориях на решетке, полевые переменные являются элементами калибровочной группы, в качестве которой взята группа Z_P :

$$U_{ij} \in Z_P = \{e^{2\pi i k/P} \mid k = 0, \dots, P-1\}. \quad (16.1)$$

Включая множитель (-1) в определение действия, получаем для статистической суммы

$$Z = \sum_{U \in Z_P} e^{S(U)}. \quad (16.2)$$

Как обычно, действие S есть сумма по всем граням:

$$S(U) = \sum_{\square} S_{\square}(U_{\square}). \quad (16.3)$$

В обычном случае $S_{\square}(U_{\square})$ есть вещественная часть следа матрицы U_{\square} . Для дальнейшего удобно перейти к более общему виду действия. Поскольку мы интерпретируем $\exp S$ как больцмановский вес, действие S_{\square} должно быть, очевидно, вещественной величиной. Так как ориентация граней несущественна, то должно выполняться

$$S_{\square}(U_{\square}) = S_{\square}(U_{\square}^{-1}). \quad (16.4)$$

Если не считать этого ограничения, действие является произвольным. Для произвольной калибровочной группы обычно полагают, что S_{\square} является некоторой функцией классов на группе. Для абелевых групп любая функция есть функция классов.

Для произвольной калибровочной группы можно представить $S_{\square}(U)$ в виде разложения по характерам:

$$S_{\square}(U) = \sum_n \beta_n \chi_n(U), \quad (16.5)$$

где χ_n — след в n -м неприводимом представлении группы. В случае группы Z_P имеется P неприводимых одномерных представлений, для которых

$$R_n(U) = U^n, \quad n = 0, \dots, P-1. \quad (16.6)$$

Свойство представлений

$$R_n(U) R_n(U') = R_n(UU') \quad (16.7)$$

является тривиальным следствием абелевости группы. Представления комбинируются по правилу

$$R_m(U) R_n(U) = R_{m+n}(U), \quad (16.8)$$

где индекс $m + n$ определен по модулю P . Для R_n выполняется также свойство ортогональности

$$P^{-1} \sum_U R_m(U) R_n(U) = P^{-1} \sum_U U^{m+n} = \delta_{m, P-n}. \quad (16.9)$$

Важным обстоятельством, приводящим к тому, что преобразования дуальности в теориях с Z_P -симметрией имеют простой вид, является тот факт, что для характеров выполняются те же правила комбинаций, что и для элементов группы. Дуальная теория опять будет Z_P -теорией. В неабелевых теориях ситуация усложняется, так как они имеют более сложную структуру представлений.

Используя приведенное выше представление, перепишем (16.5) в виде

$$S_{\square}(U) = \sum_n \beta_n U^n, \quad (16.10)$$

причем условие связи (16.4) принимает вид

$$\beta_n = \beta_{P-n}. \quad (16.11)$$

Параметр β_0 является просто нормирующим множителем; он несуществен для термодинамики, но его полезно сохранить. Ортогональность характеров позволяет получить из (16.10)

$$\beta_n = P^{-1} \sum_U U^{-n} S_{\square}(U). \quad (16.12)$$

Для последующего удобно больцмановский вес $e^{S_{\square}}$ разложить в ряд:

$$e^{S_{\square}(U)} = \sum_n b_n U^n, \quad (16.13)$$

где

$$b_n = P^{-1} \sum_U U^{-n} e^{S_{\square}(U)} \quad (16.14)$$

и из равенства (16.11) следует

$$b_n = b_{P-n}. \quad (16.15)$$

Эти параметры оказываются весьма существенными при разложении по обратной константе связи. Коэффициент β_0 , определяющий сдвиг энергии, приводит к появлению общего мультипликативного фактора в b_n .

Подставим теперь разложение (16.14) для каждой грани в функциональный интеграл. Это приведет к появлению суммы по целым числам n_{\square} , каждое из которых соответствует элементарному квадрату на решетке. В результате получим для статистической суммы

$$Z = \sum_{\{n_{\square}\}} \left(\prod_{\square} b_{n_{\square}} \right) \prod_{\{ij\}} \left(\sum_{\square \supset ij} \left(\prod_{\square \supset ij} U_{ij}^{n_{\square}} \right) \right), \quad (16.16)$$

где произведение $\prod_{\square \supset ij}$ берется по всем ребрам ij , принадлежащим грани \square . Используя соотношение ортогональности для суммирования по U_{ij} , получаем

$$Z = \sum_{\{n_{\square}\}} \left(\prod_{\square} b_{n_{\square}} \right) \prod_{\{ij\}} (P \delta_{\sum_{\square \supset ij} n_{\square}, 0}), \quad (16.17)$$

где аргументы δ -символов Кронекера определены по модулю P . Множитель P перед дельта-функцией появился в результате суммирования по группе. Произведем теперь замену переменных, которая позволит нам преобразовать это выражение. Заметим, что в аргумент дельта-символа Кронекера

$$\delta_{\sum_{\square \supset ij} n_{\square}, 0} \quad (16.18)$$

входит сумма по шести граням, каждая из которых содержит выбранное ребро ij . На рис. 16.1 изображены четыре из этих шести

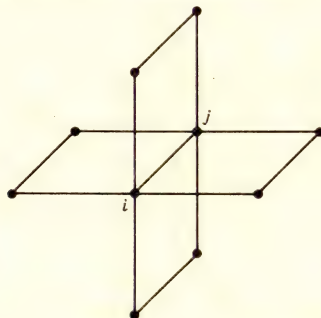


Рис. 16.1. Четыре из шести граней, содержащие ребро ij . Две остальные грани связаны с четвертым измерением.

граней, две другие связаны с четвертым измерением. Перейдем теперь к дуальной решетке. С этой целью поставим в соответствие центру каждого гиперкуба исходной решетки узел новой (дуальной) решетки. В результате узлу, ребру, грани, кубу и гиперкубу исходной решетки можно сопоставить гиперкуб, куб, грань, ребро и узел соответственно дуальной решетки. Например, ребру дуален куб, яв-

ляющийся общим для двух гиперкубов, каждый из которых, в свою очередь, дуален одному из узлов, принадлежащих этому ребру. Далее можно ввести понятие направления отображения дуальности, если использовать четырехмерное правило «левой руки». Например, дуальным к ребру в положительном t -направлении является куб в xuz -пространстве. Будем считать, что все грани этого куба имеют левую ориентацию, если смотреть из центра куба. Если исходное ребро направлено в положительном x -направлении, то дуальный куб лежит в uzt -пространстве, и т. д. Грань дуальна другой грани, которая является общей для четырех кубов, каждый из которых, в свою очередь, дуален одному из ребер, образующих исходную грань. Ориентация дуальной грани определяется сформулированным выше соглашением, если применить его к любому из четырех ребер исходной грани.

Полезная роль преобразования дуальности при исследовании Z_p -теорий становится очевидной, если заметить, что шесть граней в (16.18) дуальны другим шести граням, которые, в свою очередь, образуют трехмерный куб, дуальный ребру ij . В терминах дуальной решетки статистическая сумма есть многократная сумма по целым числам, ассоциированным с гранями, причем для любых шести граней, образующих куб, сумма этих чисел равна нулю (по модулю P). Грани ориентированы в соответствии с предписанием, описанным выше. Следующий шаг заключается в снятии ограничения, накладываемого дельта-функцией (16.18).

Если каждое целое число, соответствующее грани на дуальной решетке, можно представить в виде суммы (по модулю P) четырех целых чисел n_{ij} , каждое из которых соответствует ребру ij , являющемуся границей этой грани, то связи (16.18) автоматически снимаются. Действительно, каждое ребро ij принадлежит двум граням на поверхности куба. Поэтому при суммировании в (16.18) оно входит дважды, каждый раз со своей ориентацией; в результате происходит сокращение. Замечательно, что решение уравнений, порождаемых связями, единственно с точностью до калибровочных преобразований. Чтобы увидеть это, фиксируем калибровку, как это обсуждалось в гл. 9. Выберем максимально возможный набор ребер, не образующих замкнутой петли, т. е. максимально возможный древесный граф, и положим значения n_{ij} на этих ребрах равными единице. Каждое не фиксированное ребро ij образует единственную замкнутую петлю Γ с набором фиксированных ребер. Чтобы разрешить условие связи, положим $n_{ij} = \sum_{\square} n_{\square}$, где суммирование ведется по всем граням, принадлежащим какой-либо двумерной поверхности, для которой Γ является границей. В силу условия (16.18)

определение n_{ij} не зависит от выбора поверхности. Если мы теперь откажемся от фиксации калибровки, получим P^{N^4} калибровочно эквивалентных конфигураций, для каждой из которых переменные на дуальной грани представляются в виде суммы по соответствующим ребрам.

Эта процедура позволяет избавиться от дельта-функций в (16.17) и заменить сумму по переменным, соответствующим граням, на сумму по переменным, соответствующим дуальным ребрам:

$$Z = P^{3N^4} \sum_{\{n_{ij}\}} \prod_{\square} b_{n_{\square}}, \quad (16.19)$$

где n_{\square} — сумма по модулю P чисел n_{ij} , каждое из которых соответствует ребру ij грани \square . Введем далее полевые переменные U_{\square} естественным образом:

$$U_{\square} = e^{2\pi i n_{\square}/P} \quad (16.20)$$

и выпишем разложение по характерам для b_n

$$b_{n_{\square}} = P^{-\frac{1}{2}} e^{\tilde{S}(U_{\square})} = P^{-\frac{1}{2}} \sum_n \tilde{b}_n U_{\square}^n. \quad (16.21)$$

Это равенство определяет дуальное действие $\tilde{S}(U_{\square})$. В результате статистическую сумму можно представить как функцию новых переменных

$$Z(b) = Z(\tilde{b}). \quad (16.22)$$

Параметры b и \tilde{b} связаны между собой линейно:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{b}_n &= A_{nm} b_m, \\ b_n &= A_{nm}^* \tilde{b}_m, \end{aligned} \right\} \quad (16.23)$$

где A — унитарная матрица, элементы которой порождают дискретное преобразование Фурье:

$$A_{nm} = P^{-\frac{1}{2}} e^{2\pi i mn/P}. \quad (16.24)$$

Эта матрица имеет следующие свойства:

$$A^{-1} = A^* \quad (\text{унитарность}), \quad (16.25)$$

$$A = A^T \quad (\text{симметричность}), \quad (16.26)$$

$$(A^2)_{mn} = \delta_{m, P-n}, \quad (16.27)$$

$$A^4 = I. \quad (16.28)$$

Равенство (16.22) является основным следствием дуальности для моделей с Z_p -симметрией. Заметим, что свойство (16.15), связанное с ориентационной инвариантностью, автоматически выполняется для дуальных переменных, так как

$$A_{p-n, m} = A_{n, p-m}. \quad (16.29)$$

Однако дуальность не всегда приводит к реальной физической модели. Если один из параметров \tilde{b}_n меньше нуля, то его уже нельзя интерпретировать как новый больцмановский вес, как это было в (16.21). Для областей параметрического пространства, дуальных другой физической модели, мы получаем интересные ограничения на особенности статистической суммы. Эти особенности могут появляться либо парой, дуальные одна другой, либо иметь место в самодуальных точках, где $\tilde{b} = b$. Может быть реализована каждая из этих возможностей.

Рассмотрим в качестве примера теорию с группой симметрии Z_2 . В этом случае полевые переменные принимают значения $\{+1, -1\}$ и действие имеет вид

$$S_{\square}(U) = \beta_0 + \beta_1 U. \quad (16.30)$$

Параметры b_0 и b_1 легко получить из разложения

$$(\beta_1 U) = \cosh(\beta_1) + U \sinh(\beta_1), \quad (16.31)$$

откуда следует

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= \exp(\beta_0) \cosh(\beta_1), \\ b_1 &= \exp(\beta_0) \sinh(\beta_1). \end{aligned} \right\} \quad (16.32)$$

Обращая эти равенства, находим

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= \frac{1}{2} \log(b_0^2 - b_1^2), \\ \beta_1 &= \frac{1}{2} \log((b_0 - b_1)/(b_0 + b_1)). \end{aligned} \right\} \quad (16.33)$$

Для матрицы A получаем

$$A = 2^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (16.34)$$

В результате приходим к новым дуальным переменным

$$\left. \begin{aligned} \tilde{b}_0 &= 2^{-\frac{1}{2}}(b_0 + b_1), \\ \tilde{b}_1 &= 2^{-\frac{1}{2}}(b_0 - b_1). \end{aligned} \right\} \quad (16.35)$$

Для переменных β_0 и β_1 имеем

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\beta}_0 &= \beta_0 + \frac{1}{2} \log (\sinh (2 \beta_1)), \\ \tilde{\beta}_1 &= \frac{1}{2} \log (\tanh (\beta_1)). \end{aligned} \right\} \quad (16.36)$$

Изменение β_0 приводит просто к изменению общего нормирующего множителя; в то же время сдвиг β_1 означает нетривиальное изменение модели. Малые β_1 соответствуют большим $\tilde{\beta}_1$ и наоборот. Если мы знаем термодинамические функции, скажем в пределе слабой связи, то с помощью (16.22) можем определить эти величины в области сильной связи. Существует одно значение β_1 , которое при преобразовании дуальности остается неизменным: $\tilde{\beta}_1 = \beta_1$. Используя (16.36), легко получить

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \log (1 + 2^{\frac{1}{2}}) = 0.4406867 \dots \quad (16.37)$$

Численные расчеты, проведенные в рамках этой модели [54], показали, что в этой точке имеет место фазовый переход первого рода (см. по этому поводу рис. 9.1).

Рассмотрим теперь более общий случай с произвольными значениями P . В простой вильсоновской модели с Z_P -симметрией есть только параметры β_0 и $\beta_{\pm 1}$. При $P = 2, 3, 4$ модель преобразуется сама в себя при преобразовании дуальности, и вычисления с помощью метода Монте-Карло [55] показывают, что в самодуальной точке имеет место фазовый переход первого рода. При $P \geq 5$ модель перестает быть самодуальной, и в теории, дуальной к исходной, уже будет не два параметра β_0 и β_1 , а больше. Численные расчеты указывают, что в этом случае имеют место два фазовых перехода второго рода, положение одного из которых стремится к бесконечности в пределе бесконечных P . В результате в $U(1)$ -теории имеет место только один фазовый переход второго рода. Все эти свойства моделей можно понять, используя свойства дуальности слегка модифицированного однопараметрического самодуального действия.

Вместо вильсоновского действия можно выбрать действие Виллэна [170], определяемое следующим образом:

$$e^{S_{\square}(U)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta(\theta - 2\pi l)^2}, \quad (16.38)$$

где угол θ связан с полевой переменной U соотношением

$$U = e^{i\theta}, \quad -\pi < \theta \leq \pi. \quad (16.39)$$

Для параметров b_n получаем в этом случае

$$b_n = P^{-1} \sum_{m=1}^P \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi\beta(m/P-l)^2 - 2\pi imn/P). \quad (16.40)$$

Чтобы упростить это выражение, мы сначала усложним его, введя под знак суммы по l интеграл по углу θ , и воспользуемся затем известным равенством

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(l - \theta/2\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\theta}. \quad (16.41)$$

Тогда получим

$$b_n = P^{-1} \sum_{m=1}^P \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (d\theta/2\pi) \exp(-\frac{1}{2}\beta(\theta - 2\pi m/P)^2 - 2\pi imn/P + ik\theta). \quad (16.42)$$

Интеграл по $d\theta$ является гауссовым и легко вычисляется:

$$b_n = P^{-1} (2\pi\beta)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^P \exp(-\frac{1}{2}k^2/\beta - 2\pi im(n+k)/P). \quad (16.43)$$

Суммируя по m , получаем, что $k + n$ должно равняться нулю по модулю P . В результате для b_n находим окончательное выражение

$$b_n = (2\pi\beta)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}(P^2/\beta)(k - n/P)^2). \quad (16.44)$$

Возвращаясь опять к уравнению (16.21) и интерпретируя b_n как больцмановский вес дуальной модели, мы видим, что он имеет точно такой же вид, как (16.38), с той лишь разницей, что β заменено на

$$\tilde{\beta} = P^2/(2\pi\beta). \quad (16.45)$$

В результате получаем самодуальную модель с самодуальной точкой

$$\beta = (2\pi)^{-1}P. \quad (16.46)$$

Как уже отмечалось выше, в пределе $P \rightarrow \infty$ группа Z_P переходит в $U(1)$. Чтобы в электродинамике, сформулированной на решетке, не было конфайнмента, в этой модели должен быть фазовый переход к «фотонной» фазе (фазе деконфайнмента) в области слабой связи. Гут [91] строго доказал существование такого перехода. Если этот переход существует и в моделях с конечным значением P , то по соображениям дуальности должен быть также и другой

переход в дуальной точке. Положение этого второго перехода β_c , являющегося следствием дискретности группы, должно смещаться с ростом P в область бесконечных значений β , причем $\beta_c \sim P^2$ [71, 99, 169]. Такое поведение было обнаружено с помощью численных расчетов в вильсоновской теории, по отношению к которой действие Виллэна выступает в роли аппроксимирующего действия, более удобного для аналитических расчетов.

Упражнения

1. Покажите, что двумерная модель Изинга является самодуальной.

2. Покажите, что трехмерная Z_2 -калибровочная модель дуальна трехмерной модели Изинга.

3. Покажите, что P -компонентная модель Поттса, в которой все коэффициенты b_n , за исключением b_0 , равны друг другу, является самодуальной. Как было показано в работе [113], в самодуальной точке для этой модели имеет место фазовый переход первого рода.

4. Докажите самодуальность вильсоновской Z_4 -модели, единственными константами которой являются β_0 и $\beta_1 = \beta_3$.

Рекурсионные соотношения Мигдала — Каданова

Как было отмечено в главе, посвященной теории среднего поля, при больших значениях размерности пространства-времени d в калибровочных теориях на решетке должны быть фазовые переходы первого рода. Напротив, в двумерном случае калибровочные системы сводятся к простой одномерной цепочке спинов (см. упражнение 1 в гл. 9), в которой нет термодинамических сингулярностей. Очень важно выяснить, в пространстве какой размерности фазовая структура калибровочных теорий перестает быть тривиальной. Нам хотелось бы, чтобы для неабелевых групп симметрии эта критическая размерность была больше или равна четырем. Тогда при $d = 4$ можно использовать методы разложения по обратной константе для анализа проблемы конфайнмента.

С аналогичным вопросом мы сталкиваемся в спиновых моделях, где при достаточно больших значениях d , например при $d = 3$, имеют место ферромагнитные фазовые переходы, тогда как при $d = 1$ дальний порядок невозможен в моделях без дальнедействующих сил. Для двумерных магнетиков существуют строгие теоремы [40, 137, 151], строго ограничивающие возможное упорядочение в теориях с непрерывной группой симметрии. Возникающие в такой системе безмассовые спиновые волны, связанные с ферромагнитным состоянием, имеют сильные инфракрасные особенности, которые полностью разупорядочивают систему. Без отщепления длинноволновых спиновых волн, которое имеет место в свободной теории поля и в теории с $U(1)$ -симметрией, в этих моделях не может быть безмассовой фазы. Это дает серьезное основание считать, что $d = 2$ есть критическая размерность для спиновых систем с взаимодействием ближайших соседей. Действительно, в таких моделях, когда симметрия неабелева, не должно быть намагнитченности, и спиновые волны не отщепляются. К сожалению, для калибровочных теорий таких сильных аргументов не существует.

С точки зрения ренормгруппы фазовая структура теории проявляется тогда, когда мы сравниваем систему на решетках с различными значениями шага. Как уже обсуждалось в гл. 12, точка фазового перехода второго рода соответствует фиксированной точке, где физика не меняется ни при изменении масштаба измерения, ни при изменении шага решетки. Рекурсионные соотношения Мигдала — Каданова [103, 104, 139, 140] позволяют приближенно сравнивать теории с различными значениями шага решетки.

Достоинство этого метода заключается в том, что он предлагает простой способ получения приближенных ренормгрупповых функций. Недостаток метода связан с тем, что трудно оценить его точность. Метод дает точные результаты для одномерных спиновых систем и для двумерных калибровочных систем. В отличие от метода среднего поля, точность рекурсионных соотношений падает с ростом размерности d . Следует особенно отметить тот факт, что для магнетиков метод рекурсионных соотношений правильно предсказывает значение критической размерности равное двум.

Для d -мерных калибровочных теорий эти приближенные соотношения такие же как для $d/2$ -мерных спиновых систем. Отсюда немедленно следует, что $d = 4$ есть критическое значение размерности в случае непрерывных калибровочных групп. В этом смысле отсутствие фазовых переходов в четырехмерной калибровочной теории с неабелевой группой симметрии полностью соответствует отсутствию намагниченности в двумерной спиновой системе. Действительно, до применения методов Монте-Карло к исследованию калибровочных теорий это было самое сильное свидетельство в пользу существования конфайнмента в стандартной калибровочной теории сильных взаимодействий.

Из соответствия между d -мерными калибровочными теориями и $d/2$ -мерными спиновыми теориями следует подобие структур $U(1)$ -симметричной калибровочной теории при $d = 4$ и двумерной «ХУ»-модели. В последние годы вторая модель привлекла пристальное внимание специалистов в области твердого тела. В ней есть фазовый переход бесконечного порядка при переходе в область слабой связи, причем корреляционные функции убывают на больших расстояниях по степенному закону, а показатель степени зависит непрерывным образом от константы взаимодействия [119]. Для теории с абелевой $U(1)$ -симметрией такое поведение совместимо с существованием безмассовой «фотонной» фазы, о которой упоминалось в предыдущей главе. Предполагается, что перенормированный заряд непрерывным образом зависит от голой константы связи.

Хотя соотношения Мигдала — Каданова, по-видимому, правильно предсказывают значение критической размерности, а также существование некоторых фазовых переходов, характер этих переходов определяется не всегда правильно. Предсказывается, что четырехмерная Z_2 -калибровочная модель подобна двумерной модели Изинга, тогда как в действительности в первой модели имеет место фазовый переход первого рода, а во второй — второго рода. $U(1)$ -симметричная теория при $d = 4$, обсуждавшаяся в предыду-

шем абзаце, имеет фазовый переход второго рода [22, 60, 126, 142], тогда как в соответствующей спиновой модели имеет место фазовый переход бесконечного порядка [119].

Для демонстрации возможностей метода рассмотрим сначала тривиальный пример — одномерную модель Изинга. Пусть имеется N спинов s_i , расположенных в узлах i на одной прямой, причем $s_i = \pm 1$ и учитывается взаимодействие ближайших соседей. Статистическая сумма определяется следующим образом:

$$Z = \sum_{\{s_i\}} \exp \left(\sum_{i=1}^N (\beta_0 + \beta_1 s_i s_{i+1}) \right). \quad (17.1)$$

Точно так же, как в предыдущей главе, удобно сохранить параметр β_0 как свободный параметр, даже если он не имеет отношения к термодинамическим особенностям. Для простоты используем периодические граничные условия: $s_{N+1} = s_1$. Переходя к матрице переноса T , перепишем Z в виде

$$Z = \text{Tr}(T^N), \quad (17.2)$$

где T — матрица размерности 2×2 , описывающая взаимодействие между ближайшими спинами:

$$T = e^{\beta_0} \begin{pmatrix} e^{\beta_1} & e^{-\beta_1} \\ e^{-\beta_1} & e^{\beta_1} \end{pmatrix}. \quad (17.3)$$

В этом примере соотношения Мигдала — Каданова получаются в результате «децимации», т. е. суммирования по каждому второму спину. Считая N четным, представим статистическую сумму Z в виде

$$Z = \text{Tr}(T'^{N/2}), \quad (17.4)$$

где

$$T' = T^2 = e^{2\beta_0} \begin{pmatrix} e^{\beta_1} & e^{-\beta_1} \\ e^{-\beta_1} & e^{\beta_1} \end{pmatrix}. \quad (17.5)$$

Новые параметры β'_0 и β'_1 связаны со старыми соотношениями

$$\beta'_0 = 2\beta_0 + \frac{1}{2} \log(4 \cosh(2\beta_1)), \quad (17.6)$$

$$\beta'_1 = \frac{1}{2} \log(\cosh(2\beta_1)). \quad (17.7)$$

Таким образом, теория с параметрами β_0 и β_1 имеет то же физическое содержание, что и модель с вдвое большим шагом решетки, но другими значениями констант β'_0 и β'_1 . Мы можем использовать эту связь для того, чтобы устремить шаг решетки к нулю и перей-

ти к непрерывному пределу. При этом необходимо на каждом этапе подбирать такие константы, чтобы размерная корреляционная длина оставалась постоянной. Параметр β_0 определяет сдвиг энергии вакуума и не может привести к появлению термодинамических сингулярностей, поэтому проследим подробнее за изменением параметра β_1 . Равенство (17.7) связывает $\beta_1(2a)$ и $\beta_1(a)$:

$$\beta_1(2a) = \frac{1}{2} \log (\cosh (2\beta_1(a))). \quad (17.8)$$

В непрерывном пределе величина β_1 должна сходиться к фиксированной точке рекурсионного соотношения (17.8). Это соотношение имеет две фиксированные точки: $\beta_1 = 0$ и $\beta_1 = \infty$. Первая из них является ультрафиолетово нестабильной, а вторая — стабильной в том смысле, как это обсуждалось в гл. 12. Эта теория является асимптотически свободной, поскольку в непрерывном пределе мы должны рассматривать случай $\beta_1 \rightarrow \infty$, т. е. нулевую «температуру». Аналогичного поведения мы ожидаем и в калибровочной теории сильных взаимодействий при $d = 4$.

Для дальнейшего нам удобно диагонализировать матрицу T и найти ее собственные значения. Это легко сделать, используя разложение экспоненцированного действия по характерам, вводя коэффициенты b_n , аналогично тому, как это делалось в предыдущей главе:

$$T_{s,s'} = b_0 + b_1 ss', \quad (17.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где} \quad b_0 &= e^{\beta_0} \cosh (\beta_1), \\ b_1 &= e^{\beta_0} \sinh (\beta_1). \end{aligned} \right\} \quad (17.10)$$

С точностью до множителя 2 числа b_0 и b_1 являются собственными значениями матрицы T . Из ортогональности характеров следует

$$(T^2)_{ss'} = 2(b_0^2 + b_1^2 ss'). \quad (17.11)$$

Заметим, что множитель 2 появился потому, что мы не нормировали сумму по спинам: $\sum_s 1 = 2$, тогда как обычно $\int dg = 1$. Таким

образом, рекурсионные соотношения для параметров b_i имеют простой вид

$$b'_i = 2b_i^2. \quad (17.12)$$

Это можно обобщить на произвольную группу. «Децимация» есть обобщенная свертка, и она становится особенно простой на языке характеров. Будем рассматривать спины как элементы g не-

которой группы. Тогда статистическая сумма Z определяется следующим образом:

$$Z = \int (\prod_i dg_i) \exp(\sum_i S_L(g_i g_{i+1}^{-1})), \quad (17.13)$$

где S_L — вклад в действие от одного ребра решетки. Выполним разложение взаимодействия соседей по характерам неприводимых представлений группы

$$\exp(S_L(g)) = \sum_R b_R \chi_R(g) = \exp(\sum_R \beta_R \chi_R(g)) \quad (17.14)$$

и воспользуемся свойством ортогональности характеров

$$\int dg \chi_R^*(g) \chi_{R'}(gg') = d_R^{-1} \delta_{RR'} \chi_{R'}(g'), \quad (17.15)$$

где d_R — размерность матриц представления (см. упражнение 3 в гл. 8). Тогда получим

$$b'_R = d_R^{-1} b_R^2. \quad (17.16)$$

Мы считаем здесь, что для физической теории коэффициенты b_R являются вещественными, и что для любого представления сопряженное ему представление входит в сумму (17.14) с тем же коэффициентом.

До сих пор мы рассматривали точные рекурсионные представления. Но в пространствах с большей размерностью приходится делать приближения. Рассмотрим двумерную модель Изинга. Статистическая сумма этой модели имеет вид

$$Z = \sum_{\{s_i\}} \exp(\sum_{\langle ij \rangle} (\beta_0 + \beta_1 s_i s_j)), \quad (17.17)$$

где, как и прежде, переменные принимают значения ± 1 , а суммирование в показателе экспоненты производится по всем парам соседних узлов на квадратной решетке размера $N \times N$. Сначала просуммируем (произведем децимацию) по спинам в тех узлах, в которых координата x принимает нечетные значения. На рис. 17.1 показана часть решетки; спины, по которым производится децимация, обозначены буквой σ . В результате мы придем к эффективному действию, которое будет зависеть только от спинов, обозначенных буквой s . Хотя в принципе это суммирование можно выполнить точно, возникают сложности, связанные с тем, что появятся члены с взаимодействием не только ближайших соседей. Эта ситуация схематически изображена на рис. 17.2. При этом децимация приво-

дит к появлению взаимодействия двух любых s -спинов, принадлежащих двум соседним столбцам, независимо от того, насколько далеко они отстоят в направлении оси y . Для того чтобы двигаться дальше, необходимо прибегнуть к упрощающим приближениям. Простая процедура Мигдала — Каданова позволяет исключить такие взаимодействия на больших расстояниях с помощью приема, называемого сдвижкой связей.

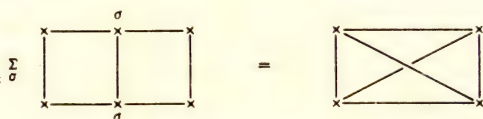
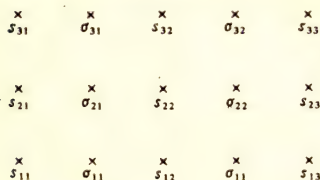


Рис. 17.1. Часть двумерной решетки. Суммирование производится по спином σ .

Рис. 17.2. Децимация приводит к появлению связей между спинами, не являющимися ближайшими соседями, например к появлению показанных здесь диагональных связей.

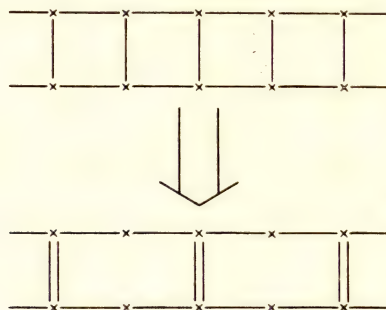


Рис. 17.3. Сдвигка связей для перехода к одномерному случаю.

Нелокальные взаимодействия возникают из-за того, что σ -спины связаны между собой вдоль оси y . Если бы этих связей не было, то суммирование по σ привело бы к одномерным рекурсионным соотношениям вдоль оси x . Приближение Мигдала — Каданова заключается в следующем. Пренебрежем взаимодействием между двумя соседними в направлении оси y σ -спинами, компенсируя это увеличением взаимодействия между двумя соседними в том же направлении s -спинами, по которым не производится суммирование. Это равносильно тому, что связь между двумя σ -спинами сдвинута на один шаг в направлении оси x , в результате чего полу-

чается двойная связь между соседними s -спинами в направлении оси y . Такая сдвигка связей изображена на рис. 17.3. В результате на децимированной решетке будем иметь

$$\beta_i^y \rightarrow 2\beta_i^y, \quad (17.18)$$

где индекс y означает, что речь идет о взаимодействии в направлении оси y . Используя это приближение, легко получить с помощью (17.6) и (17.7) для направления x одномерные рекурсионные соотношения для параметров β_0 и β_1 :

$$\beta_0^x \rightarrow 2\beta_0 + \frac{1}{2} \log(4 \cosh(2\beta_1^x)), \quad (17.19)$$

$$\beta_1^x \rightarrow \frac{1}{2} \log(\cosh(2\beta_1^x)). \quad (17.20)$$

Далее необходимо повторить эту процедуру, производя децимацию в направлении оси y , модифицировав соответствующим образом параметры β_0^x и β_1^x . В результате получаем

$$\beta_y^y \rightarrow 4\beta_y^y + \frac{1}{2} \log(4 \cosh(4\beta_y^y)), \quad (17.21)$$

$$\beta_y^y \rightarrow \frac{1}{2} \log(\cosh(4\beta_y^y)), \quad (17.22)$$

$$\beta_0^x \rightarrow 4\beta_0^x + \log(4 \cosh(2\beta_1^x)), \quad (17.23)$$

$$\beta_1^x \rightarrow \log(\cosh(2\beta_1^x)). \quad (17.24)$$

К сожалению, в результате последовательного выполнения процедуры децимации теория потеряла симметрию между направлениями x и y . Ниже мы восстановим эту симметрию, но сначала заметим, что рекурсионные соотношения имеют асимметричную фиксированную точку

$$\beta_1^x = 2\beta_y^y = 0.609377863... \quad (17.25)$$

Чтобы восстановить xy -симметрию модели, сделаем децимацию бесконечно малой. Изменим с этой целью шаг решетки в направлении x не в два раза, а в $(1 + \Delta)$ раз. Для переменных b_R соответствующие изменения заключаются в том, что они возводятся в степень $(1 + \Delta)$. Тогда вместо (17.16) получим

$$b_R' = d_R^{-\Delta} b_R^{1+\Delta} = b_R + b_R \log(b_R/d_R) \Delta + O(\Delta^2). \quad (17.26)$$

При сдвигке связей в y -направлении параметр β_R^y необходимо умножить на $1 + \Delta$. Пренебрегая членами типа $O(\Delta^2)$, повторим процедуру децимации в направлении y . При этом x -связи и y -связи меняются одинаковым образом, и мы получаем

$$\beta_R' = \beta_R + (\beta_R + \sum_{R'} (\partial \beta_R / \partial b_{R'}) b_{R'} \log(b_{R'}/d_{R'})) \Delta. \quad (17.27)$$

Поскольку изменение шага решетки равно $a\Delta$, мы получаем приближение Мигдала — Каданова для ренормгрупповой функции

$$a d\beta_R/da = \beta_R + \sum_{R'} (\partial\beta_R/\partial b_{R'}) b_{R'} \log(b_{R'}/d_{R'}). \quad (17.28)$$

Это выражение непосредственно обобщается на случай размерности d ; сдвигка связей производится во всех $(d - 1)$ направлениях, ортогональных тому, вдоль которого производится децимация. В результате получаем

$$a d\beta_R/da = (d-1)\beta_R + \sum_{R'} (\partial\beta_R/\partial b_{R'}) b_{R'} \log(b_{R'}/d_{R'}). \quad (17.29)$$

Для коэффициента β_1 в модели Изинга получаем

$$a d\beta_1/da = (d-1)\beta_1 + \sinh(\beta_1) \cosh(\beta_1) \log(\tanh(\beta_1)). \quad (17.30)$$

При $d = 2$ это уравнение имеет фиксированную точку

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \log(1 + 2^{\frac{1}{2}}), \quad (17.31)$$

которая замечательным образом совпадает с точным значением β_1 , предсказываемым дуальностью. При $d \rightarrow 1$ это значение стремится к бесконечности. Используя асимптотическое представление гиперболических функций, получаем для фиксированной точки

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(d-1)^{-1} + O(e^{-2\beta_1}). \quad (17.32)$$

Таким образом, можно сказать, что критическое значение размерности для модели Изинга равно единице.

Для моделей с непрерывными группами симметрии рекурсионные соотношения предсказывают, что критическое значение размерности равно двум. Это легко понять с помощью следующих простых соображений. При малых значениях константы взаимодействия экспоненцированное действие имеет резкий пик при значениях элементов группы вблизи единицы и может быть аппроксимировано гауссовой экспонентой, зависящей от параметров группы. В результате децимации в направлении x ширина гауссовой функции увеличивается в $(1 + \Delta)$ раз. Наоборот, сдвигка связей в ортогональном направлении уменьшает ширину гауссиана в $(1 + \Delta)$ раз. В двумерном пространстве-времени эти два процесса компенсируют друг друга.

Чтобы рассмотреть этот вопрос более детально удобно ввести новые переменные, которые упрощают вид рекурсионных соотношений:

$$\begin{aligned} f_R &= \log(b_R/(d_R b_0)) \\ &= \log(d_R^{-1}(\partial/\partial\beta_R) \log b_0), \end{aligned} \quad (17.33)$$

где b_0 — параметр, соответствующий синглетному представлению:

$$b_0 = \int dg \exp(S_L(g)). \quad (17.34)$$

Переменные f_R очень удобны во многих отношениях. Во-первых, для их определения достаточно знать только один параметр b_0 . Во-вторых, f_R является функцией отношения двух параметров b и поэтому не зависит от общей нормировки, определяемой параметром β_0 . Наконец, рекурсионное соотношение допускает «линеаризованный» вид

$$a df_R/da = (1 + (d-1) \sum_{R'} \beta_{R'} \partial/\partial \beta_{R'}) f_R. \quad (17.35)$$

Рассмотрим теперь предел слабой связи в теории с действием, содержащим лишь одну константу β , соответствующую фундаментальному представлению калибровочной группы. Параметр b_0 определяется выражением

$$b_0 = \int dg e^{\beta \operatorname{Re} \operatorname{Tr}(g)}. \quad (17.36)$$

Отсюда получаем соответствующую переменную f :

$$f = \log(d_F^{-1}(\partial/\partial \beta) \log(b_0)), \quad (17.37)$$

где d_F — размерность групповой матрицы g . Рекурсионное соотношение для f имеет вид

$$a(d/da)f = (1 + (d-1)\beta \partial/\partial \beta)f. \quad (17.38)$$

При достаточно больших β основной вклад в интеграл (17.36) дают те же значения переменных интегрирования, при которых матрица g является почти единичной; g можно представить в виде

$$g = e^{i\omega \cdot \lambda}. \quad (17.39)$$

Тогда

$$\operatorname{Re} \operatorname{Tr}(g) = d_F - \frac{1}{4}\omega^2 + O(\omega^4), \quad (17.40)$$

где λ^α — генераторы группы; их число равно n_g . Вычислив гауссов интеграл, получаем

$$f = n_g/(2\beta d_F) + O(\beta^{-2}). \quad (17.41)$$

Поставляя это выражение в (17.38), получаем уравнение для β

$$a(d/da)\beta = (d-2)\beta + O(1), \quad (17.42)$$

из которого видно, что критическое значение размерности d равно двум. Член $O(1)$ в (17.42) зависит от групповой меры, а также от члена с четверным взаимодействием в действии. Эта зависимость, по-видимому, свидетельствует о том, что использованные в рекурсионных соотношениях приближения выходят за пределы области своей применимости; тем не менее, Каданов [104] привел эвристические соображения в пользу того, что в двумерных неабелевых теориях этот член отрицателен. Это согласуется с предсказанием асимптотической свободы в таких моделях на основе теории возмущений [155].

Этот метод непосредственно обобщается на калибровочные теории. Особенно легко это сделать, выбрав соответствующим образом калибровку. Например, если мы хотим реализовать процедуру децимации вдоль оси x , то естественно выбрать аксиальную калибровку, в которой все переменные калибровочного поля, определенные на ребрах, параллельных оси x , равны единице. Тогда мы получим набор связанных одномерных цепочек спинов, как это обсуждалось в главе, посвященной фиксации калибровки. Рассмотрим все грани, перпендикулярные оси x . Сдвинем те из них, которые имеют нечетную x -координату, на один шаг. Тогда мы можем проинтегрировать по переменным с нечетными x . В этом случае децимация на гранях, параллельных оси x , точно такая же, как для одномерной спиновой системы. После того как процедура децимации вдоль одной оси реализована, исключим использованное калибровочное условие и повторим всю процедуру, выбрав другую ось. Реализуя «инфинитезимальную децимацию» вдоль каждой оси, получим приближенные рекурсионные соотношения Мигдала — Каданова в калибровочной теории для ренормгрупповой функции

$$a(d/da)\beta_R = (d-2)\beta_R + 2 \sum_{R'} (\partial\beta_R/\partial b_{R'}) b_{R'} \log b_{R'}. \quad (17.43)$$

Параметры β_R и b_R определяются с помощью равенств типа (17.14) с той лишь разницей, что S_L заменяется на S_\square , а $g_i g_{i+1}^*$ заменяется на U_\square . Множитель $(d-2)$ в (17.43) возникает вследствие того, что для каждой фиксированной грани производится сдвигка связей по $(d-2)$ направлениям, ортогональным этой грани, тогда как с двумя остальными направлениями, определенными плоскостью грани, связано появление множителя 2 во втором члене (17.43).

Таким образом, мы продемонстрировали справедливость утверждения, сформулированного в начале этой главы: рекурсионные соотношения для d -мерной калибровочной теории идентичны (с точностью до общего множителя 2) рекурсионным соотношениям

для $d/2$ -мерной спиновой теории. Соответствие возникает вследствие того, что в спиновых моделях гамильтониан есть сумма по одномерным ребрам, тогда как в калибровочных теориях действие есть сумма по двумерным граням. Важным предсказанием является то, что критическая размерность для калибровочных теорий равна удвоенной критической размерности для спиновых теорий. Таким образом, наш четырехмерный мир демонстрирует случай критической размерности для непрерывных калибровочных групп.

Упражнения

1. Какую зависимость фиксированной точки от d предсказывает уравнение (17.30) при $d \rightarrow \infty$? Сравните это предсказание с тем, что предсказывает теория среднего поля. Какое из этих двух предсказаний можно считать более достоверным?

2. Вычислите член $O(1)$ в (17.42), используя следующие выражения для действия S_L и меры dg : $S_L(g) = (d_F^2 + \frac{1}{4} \omega^2 + C\omega^4 + O(\omega^6))$, $dg = d^n \omega (J_0 + J_1 \omega^2 + O(\omega^4))$.

3. Покажите, что преобразования дуальности в произвольной Z_p -модели (см. гл. 16) меняют порядок процедуры децимации и сдвиги связей. Таким образом, инфинитезимальное рекурсионное соотношение согласуется с дуальностью и приводит к точному ответу (17.31).

4. Что предсказывает рекурсионное соотношение Мигдала — Каданова для поведения корреляционной длины вблизи критической точки в случае двумерной модели Изинга?

Метод Монте-Карло I

Решеточный подход позволяет перейти от функциональных интегралов в калибровочной теории к обычному кратному интегралу. Это наводит на мысль попробовать, по крайней мере для систем конечного объема, численно оценить статистическую сумму. Однако легко видеть, что высокая кратность интегралов делает обычные сеточные методы неприменимыми. Рассмотрим, например, решетку с числом узлов 10^4 ; решетки таких размеров довольно часто используют при вычислениях. Число определенных на ребрах переменных в такой системе равно 40 000. Если мы теперь рассмотрим самую простую калибровочную теорию с калибровочной группой Z_2 , то статистическая сумма в этом случае будет обычной суммой, но с огромным числом слагаемых, равным

$$2^{40\,000} = 1,58 \times 10^{12\,041}. \quad (18.1)$$

Даже если бы мы могли прибавлять одно слагаемое за время, которое требуется свету, чтобы миновать протон, и производить суммирование в течение времени жизни Вселенной, то и тогда мы не смогли бы сосчитать сколько-нибудь заметную часть этой суммы.

Появление столь больших чисел показывает, что необходим статистический подход. Действительно, существует огромное число способов разместить молекулы H_2O в стакане. Но требуется знать лишь небольшое их число, чтобы определить термодинамические свойства воды. Цель подхода, основанного на методе Монте-Карло, заключается в том, чтобы получить небольшое число конфигураций, типичных для равновесного состояния в статистической модели. Суперастрономическое число членов, указанное в (18.1), никогда не может быть просуммировано точно; в то же время вполне возможно учесть несколько десятков тысяч чисел, определяющих типичные конфигурации, которые дают основной вклад в сумму.

При вычислении методом Монте-Карло сначала необходимо задать начальную конфигурацию полевых переменных, хранимых в памяти компьютера. Затем последовательно производятся псевдослучайные изменения этих переменных таким образом, чтобы получаемая в конечном счете плотность вероятности появления некоторой конфигурации C была пропорциональна знаменитому больцма-

новскому фактору:

$$p_{\text{eq}}(C) \propto e^{-\beta S(C)}, \quad (18.2)$$

где $S(C)$ — действие, определенное на этой конфигурации. Для того чтобы подчеркнуть связь со статистической механикой, в этой главе мы явно выделяем множитель β , который ранее был включен в определение действия. Наша цель состоит в том, чтобы использовать компьютер как «тепловую ванну» при обратной температуре β .

Метод Монте-Карло начал использоваться в статистической физике достаточно давно [138]. Он позволяет производить «эксперименты» на эффективных «кристаллах» с практически любым гамильтонианом взаимодействия. Это дает возможность выделять различные характерные особенности взаимодействия и исследовать их роль в таких явлениях, как фазовые переходы. Кроме того, с помощью полной конфигурации можно в принципе вычислять корреляционные функции. Метод хорошо сходится как в высокотемпературном и низкотемпературном режимах, так и при промежуточных значениях температуры. Последнее обстоятельство особенно важно для специалистов по физике частиц, которые хотели бы связать вильсоновское доказательство конфайнмента, полученное в области сильной связи, с непрерывной теорией, т. е. в пределе слабой связи.

Как и в реальных экспериментах в методе Монте-Карло имеются свои источники ошибок. Всегда есть статистические ошибки, убывающие обратно пропорционально корню квадратному из времени, затраченного на вычисления. Это может служить серьезной помехой при вычислении интересующего нас параметра в том случае, когда флуктуации сравнимы по величине с сигналом. Необходимо увеличить время счета в сто раз, чтобы уменьшить ошибку в 10 раз. Кроме статистических ошибок имеются еще систематические ошибки, связанные с конечным размером решетки и с конечным шагом решетки. В случае четырехмерных систем, рассматриваемых здесь, линейный размер решетки по необходимости ограничен; типичный размер составляет от 8 до 10 узлов вдоль каждой оси. (Ко времени написания данной книги наибольшая решетка, исследованная в рамках калибровочных теорий, имела 16^4 узлов [27].) Наконец, еще один источник систематической ошибки — неправильное определение момента достижения равновесной конфигурации; особую опасность при этом представляют различного рода метастабильные состояния.

Большая часть трудностей, связанных с появлением систематических ошибок, в принципе преодолима. Действительно, размер решетки (т. е. число узлов) можно менять в разумных пределах, при-

чем оказывается, что исследование эффектов конечного размера может дать полезную информацию о состояниях в теории [33]. Использование различных начальных конфигураций позволяет контролировать достижение равновесного распределения (подробнее об этом методе см. ниже). Изучение эффектов, связанных с конечностью шага решетки a , интересно само по себе, поскольку они связаны с перенормировкой голой константы связи (этот вопрос подробно обсуждается в гл. 12 и 13).

Рассматривая ЭВМ как тепловой резервуар, получаем один из наиболее интуитивно ясных алгоритмов вычислений методом Монте-Карло [182]. Каждое ребро и каждый узел решетки последовательно приводятся в соприкосновение с этим тепловым резервуаром. Тепловой источник, приведенный в соприкосновение с ребром, вызывает тепловые флуктуации соответствующей полевой переменной на групповом многообразии. После удаления источника ребро остается в одном из разрешенных состояний с вероятностью, определяемой больцмановским весовым множителем. Рассмотрим для примера модель с калибровочной группой $Z_2 = \{1, -1\}$. Вероятность того, что значение поля на рассматриваемом ребре равно $+1$, составляет

$$P(1) = e^{-\beta S(1)} / (e^{-\beta S(1)} + e^{-\beta S(-1)}), \quad (18.3)$$

где $S(\pm 1)$ — действие, вычисленное для случая, когда значение поля на данном ребре равно ± 1 , а все остальные ребра имеют фиксированные значения поля. Заметим, что если действие локальное, т. е. каждое ребро связано лишь с конечным числом своих соседей, то вероятность зависит только от тех переменных, которые заданы на этих соседних ребрах. С помощью датчика случайных равномерно распределенных на единичном интервале чисел генерируется некоторое случайное число r , которое сравнивается с $P(1)$. Если $P(1) > r$, то новое значение полевой переменной на этом ребре равно $+1$, а если $P(1) < r$, то -1 . Затем вся процедура повторяется на следующем ребре и т. д. Полный однократный перебор всех ребер (и узлов) на решетке называется итерацией. После каждой итерации мы получаем новый набор полевых переменных на всей решетке (новую конфигурацию). Последовательность конфигураций образует марковскую цепь.

Эти идеи применимы к любой группе. Алгоритм «тепловой ванны» заменяет каждый элемент группы на другой, выбираемый случайным образом с вероятностью, пропорциональной экспоненцированному действию. При этом ансамбль состояний переходит в новый ансамбль, который ближе к равновесному. Смысл этого утверждения вскоре будет уточнен.

Когда групповое многообразие сложное, описанная выше процедура выбора новых групповых элементов может стать труднореализуемой либо станет занимать слишком много времени, чтобы быть эффективной. Поэтому часто используются более простые с вычислительной точки зрения алгоритмы. Они также создаются для того, чтобы ближе подойти к равновесию, но могут требовать для сходимости больше итераций. Если каждая итерация требует меньше машинного времени, чем в алгоритме «тепловой ванны», то это может дать чистый выигрыш во времени.

При создании альтернативных процедур мы нуждаемся в критерии сходимости к равновесию случайно меняющегося ансамбля конфигураций. В общем случае каждое состояние в монтекарловской последовательности следует из марковского процесса, примененного к предшествующей конфигурации. Каждый шаг в алгоритме определяется распределением вероятности $P(C', C)$, определяющим переход конфигурации C в C' . Очевидно, что $P(C, C')$ должно удовлетворять следующему условию: после обновления конфигурации равновесное распределение должно оставаться равновесным. Таким образом, больцмановские веса должны образовывать вектор собственных состояний P :

$$e^{-\beta S(C)} = \sum_{C'} P(C, C') e^{-\beta S(C')}. \quad (18.4)$$

Замечательным является тот факт, что если алгоритм позволяет получить любую конфигурацию, то это условие является также достаточным условием того, что любой ансамбль приближается в конце концов к больцмановскому распределению (18.2).

Для того чтобы пояснить это утверждение, нам понадобится ввести понятие «расстояния» между ансамблями. Пусть имеются два ансамбля E и E' , каждый из которых состоит из большого числа конфигураций. Обозначим плотность вероятности для конфигурации C из ансамбля E через $p(C)$, а плотность вероятности для конфигурации C из ансамбля E' через $p'(C)$. Тогда расстояние между E и E' мы определим следующим образом:

$$\|E - E'\| = \sum_C |p(C) - p'(C)|, \quad (18.5)$$

где суммирование ведется по всем возможным конфигурациям. Потребуем теперь, чтобы ансамбль E' получался из ансамбля E с помощью применения алгоритма метода Монте-Карло, для которого справедливо (18.4). Это означает, что

$$p'(C) = \sum_{C'} P(C, C') p(C'). \quad (18.6)$$

Поскольку $P(C, C')$ есть вероятность, должны выполняться условия

$$P(C', C) \geq 0, \quad (18.7)$$

$$\sum_{C'} P(C', C) = 1. \quad (18.8)$$

Теперь можно сравнить расстояния между E' и E и равновесным ансамблем:

$$\begin{aligned} \|E' - E_{\text{eq}}\| &= \sum_C \left| \sum_{C'} P(C, C') (p(C') - p_{\text{eq}}(C')) \right| \\ &\leq \sum_{C, C'} P(C, C') |p(C') - p_{\text{eq}}(C')| = \|E - E_{\text{eq}}\|. \end{aligned} \quad (18.9)$$

где E_{eq} — равновесный ансамбль. Отсюда следует, что применение процедуры Монте-Карло приближает ансамбль к равновесию. Заметим, что если $P(C, C')$ никогда не обращается в нуль, то (18.9) превращается в строгое неравенство, а равенство возможно только при достижении равновесия.

Для того чтобы равновесное распределение было собственным состоянием матрицы P , большинство алгоритмов на практике базируется на последовательности шагов, для каждого из которых выполняется условие детального равновесия

$$P(C', C) e^{-\beta S(C)} = P(C, C') e^{-\beta S(C')}. \quad (18.10)$$

Суммируя по всем конфигурациям C' и пользуясь равенством (18.8), отсюда немедленно получаем (18.4).

Условие детального равновесия достаточное, но не необходимое для приближения к равновесию, не определяет однозначно вероятность $P(C, C')$. Очевидно, что алгоритм теплового резервуара удовлетворяет условию детального равновесия, поскольку вероятность $P(C, C')$ не зависит от C' и пропорциональна больцмановскому весу для конфигурации C .

Метрополис и др. [138] использовали критерий детального равновесия, чтобы сформулировать другой алгоритм, который благодаря простоте стал наиболее распространенным. В случае калибровочных теорий мы начинаем с выбора пробного значения U' как ориентировочного для замены переменной U , соответствующей ребру. Эта пробная переменная генерируется с распределением $P_T(U, U')$, которое должно быть симметрично по U и U' :

$$P_T(U, U') = P_T(U', U). \quad (18.11)$$

Не считая этого ограничения, P_T произвольно и может быть подобрано опытным путем, чтобы ускорить сходимость. Как правило,

лучше всего, если U' с большей вероятностью находится вблизи старого значения U . Выбрав U' , мы вычисляем новое пробное действие $S(U')$ для сравнения со старым $S(U)$. Если действие уменьшается, т. е. новая конфигурация имеет больший больцмановский вес, то эта замена принимается. Остальная часть алгоритма определяется условием детального равновесия: если действие возрастает, то замена должна производиться с условной вероятностью $\exp\{-\beta(S(U') - S(U))\}$.

Простой способ реализации этой процедуры состоит в том, чтобы получать U' путем умножения U на случайный элемент группы, взятый из таблицы, содержащей набор случайных элементов с максимумом распределения в единице. Эта таблица должна содержать достаточное число элементов группы, и наряду с каждым элементом группы в таблицу должен входить и обратный ему, чтобы выполнялось условие (18.11).

Эффективность алгоритма Метрополиса, о котором шла речь выше, существенно зависит от оптимального выбора двух параметров. Первый параметр определяет степень близости пробного элемента U' к старому U . Максимум распределения вблизи единицы должен усиливаться при низких температурах, когда большие изменения переменных должны автоматически отвергаться. Распространенный критерий выбора распределения требует, чтобы вероятность обновления переменных на каждом шаге была порядка 50%.

Второй параметр — число испытываемых пробных значений U' на данном ребре. В статистической физике это число обычно берется равным единице. Однако в калибровочных теориях взаимодействие имеет сложный вид, что требует существенного усложнения процедуры вычислений. Это означает, что может оказаться крайне важной та тщательность, с которой осуществляются стохастические изменения. С точки зрения экономии машинного времени, необходимого для достижения равновесия, обычно имеет смысл попробовать 10 или более новых элементов, причем за это время нет необходимости повторно перемножать соседние элементы, входящие в действие. С ростом числа попыток алгоритм Метрополиса сближается с алгоритмом теплового резервуара, так как повторение процедуры на одном ребре приводит в конце концов это ребро в состояние теплового равновесия с соседями, поле на которых временно фиксировано. Это то же самое, что тепловой резервуар делает за один шаг. Чтобы определить оптимальное число попыток, нужно просто провести несколько серий пробных измерений на малой решетке для определения скорости сходимости в реальном времени.

Хотя за одну итерацию метод Метрополиса меньше сдвигает ансамбль в сторону равновесия, чем метод теплового резервуара, его достоинство заключается в исключительной простоте. Не нужно знать точный вид групповой меры: алгоритм автоматически генерирует ее с помощью случайных блужданий по группе. Кроме того, легко изменить вид действия или группу. Но для сравнительно простых групп предпочтительнее метод теплового резервуара.

Чтобы проиллюстрировать некоторые способы генерирования переменных с заданным весом, рассмотрим генерирование с помощью метода теплового резервуара $SU(2)$ -элементов для калибровочной теории с вильсоновским действием [49]. Во-первых, нам необходим источник случайных чисел, равномерно распределенных между 0 и 1. Такие датчики являются стандартными в большинстве машинных языков высокого уровня, и мы предположим, что имеется хороший датчик [111]. Для наших целей важно, что обращение к датчику осуществляется очень быстро по сравнению с временем умножения, так что на это уходит незначительная часть времени.

Имея источник случайных чисел с таким равномерным распределением, мы можем образовать случайную последовательность с произвольным распределением. Пусть имеется некоторая положительная функция $f(x)$ на единичном интервале, и мы хотим генерировать точки с весом, пропорциональным f . Для простоты предположим, что f ограничена; если это не так, то можно добиться этого с помощью замены переменных. Без потери общности можно считать, что f ограничена единицей. Используя данный генератор случайных чисел, получим пробное число для первого элемента нашего «взвешенного» ряда. Назовем это число x . Получим второе число, и будем считать x принятым, если новое случайное число меньше, чем $f(x)$. Повторим это много раз и получим последовательность принятых значений x . Так как вероятность принять значение x пропорциональна $f(x)$, точки этой последовательности имеют желаемое распределение.

Этот процесс будет неэффективным, если функция f имеет резкий пик. В этом случае, возможно, придется генерировать много чисел, прежде чем одно из них будет принято. Если известны примерное положение пика и его форма, с помощью замены переменных можно «сгладить» его. Это составляет основу описываемого ниже $SU(2)$ -алгоритма.

Рассматривая какое-то ребро (ij) , необходимо учитывать вклад в действие лишь от тех шести граней, которые содержат это ребро. Обозначим через \tilde{U}_α , $\alpha = 1, \dots, 6$, шесть произведений трех переменных, соответствующих ребрам этих граней. Тогда в алгоритме теплового резервуара распределение вероятности нового значения

переменной на ребре имеет вид

$$dp(U) \sim dU \exp\left(\frac{1}{2}\beta \operatorname{Tr}\left(U \sum_{\alpha=1}^6 \tilde{U}_{\alpha}\right)\right). \quad (18.12)$$

В случае группы $SU(2)$ величина, стоящая в показателе экспоненты в (18.12), всегда есть вещественное число. В гл. 8 мы параметризовали группу $SU(2)$ как поверхность четырехмерной сферы

$$SU(2) = \{a_0 + i\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mid a_0^2 + \mathbf{a}^2 = 1\}, \quad (18.13)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — матрица Паули. Инвариантная групповая мера равномерна на этой сфере

$$dU \sim d^4a \delta(a^2 - 1). \quad (18.14)$$

В случае группы $SU(2)$ сумма любого числа элементов группы пропорциональна другому элементу этой группы, в частности, справедливо следующее равенство

$$\sum_{\alpha=1}^6 \tilde{U}_{\alpha} = k\bar{U}, \quad (18.15)$$

где \bar{U} — также элемент $SU(2)$, а

$$k = \left| \sum_{\alpha=1}^6 \tilde{U}_{\alpha} \right|^{\frac{1}{2}}. \quad (18.16)$$

Важность этого обстоятельства проявляется, когда мы используем инвариантность групповой меры, чтобы поглотить \bar{U} :

$$dp(U\bar{U}^{-1}) \sim dU \exp\left(\frac{1}{2}\beta k \operatorname{Tr} U\right) \sim d^4a \delta(a^2 - 1) \exp(\beta k a_0). \quad (18.17)$$

Таким образом, мы обнаружили пик в экспоненцированном действии и произвели тождественное преобразование. Мы свели проблеме к генерированию случайным образом точек на четырехмерной сфере единичного радиуса с экспоненциальным весом в направлении a_0 . После того, как таким способом получен элемент U , мы заменяем переменную на ребре решетки произведением

$$U'_{ij} = U\bar{U}^{-1}. \quad (18.18)$$

Чтобы получить взвешенные точки на сфере, мы сначала проинтегрируем по абсолютной величине вектора \mathbf{a} с помощью дельта-функции и получим

$$dU \exp\left(\frac{1}{2}\beta k \operatorname{Tr} U\right) \sim \frac{1}{2} da_0 d\Omega (1 - a_0^2)^{\frac{1}{2}} \exp(\beta k a_0). \quad (18.19)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла вектора \mathbf{a} . Число a_0 генерируется в интервале $(-1, 1)$ с плотностью вероятности

$$dp(a_0) \sim (1 - a_0^2)^{\frac{1}{2}} \exp(\beta k a_0) da_0, \quad (18.20)$$

а все направления вектора \mathbf{a} совершенно равноправны. Для средних и больших значений β основной вклад в (18.20) вносит экспоненци-

альный множитель. Чтобы исключить соответствующий пик, удобно провести замену переменных

$$z = \exp(\beta k a_0). \quad (18.21)$$

Тогда вместо (18.20) получим

$$dp(z) = dz (1 - \beta^{-2} k^{-2} \log^2 z)^{\frac{1}{2}}. \quad (18.22)$$

Величина z генерируется в соответствии с процедурой, описанной выше: сначала с помощью датчика случайных чисел выбирается пробное значение z в интервале

$$e^{-2\beta k} \leq z \leq e^{+2\beta k}, \quad (18.23)$$

которое затем отвергается с вероятностью, определяемой правой частью (18.22). Повторяя эту процедуру до тех пор, пока не будет принято какое-то значение z , и затем логарифмируя, вычисляем a_0 . Последний шаг в алгоритме — выбор случайным образом направления вектора \mathbf{a} . Это можно сделать разными способами, например, выбрать случайным образом точку внутри трехмерной сферы и в качестве направления вектора \mathbf{a} взять направление к этой точке из начала координат. Заметим, что в изложенном выше алгоритме существенным образом использована специфика группы $SU(2)$. В случае более сложных групп реализация алгоритма теплового резервуара может оказаться очень непростой, поэтому на практике в большинстве случаев используют алгоритм Метрополиса.

Как правило, программы для метода Монте-Карло сравнительно просты, и включают в себя не слишком большое число довольно простых операций, которые однако повторяются очень большое число раз. В $SU(2)$ -симметричной модели обновление полевой переменной на одном ребре занимает примерно 200 мкс на машине CDC-7600, а в случае группы $SU(3)$ — 1–2 мс. В обоих случаях большая часть этого времени уходит на перемножение матриц. На практике применение таких программ ограничивается обычно необходимым машинным временем, а не машинной памятью. В случае группы $SU(2)$ необходимо запоминать четыре компоненты a_μ для каждого ребра, т. е. для решетки размером 10^4 необходим умеренный объем памяти порядка 160 000 слов.

Перейдем к описанию некоторых простых монтекарловских «экспериментов». Прежде всего возникает вопрос о времени, требуемом для достижения равновесия. Если мы не работаем вблизи точки фазового перехода, это время может быть очень малым. На рис. 18.1 показано несколько серий результатов в случае алгоритма теплового резервуара для группы $SU(2)$. Константа связи имела постоянное значение

$$\beta = 4g_c^{-2} = 2,3. \quad (18.24)$$

которое было выбрано потому, что для него сходимость в данной модели одна из самых медленных. Показаны результаты вычислений на 4-мерных решетках, содержащих от 4^4 до 10^4 узлов. Каждая итерация включает одно применение алгоритма теплового резерву-

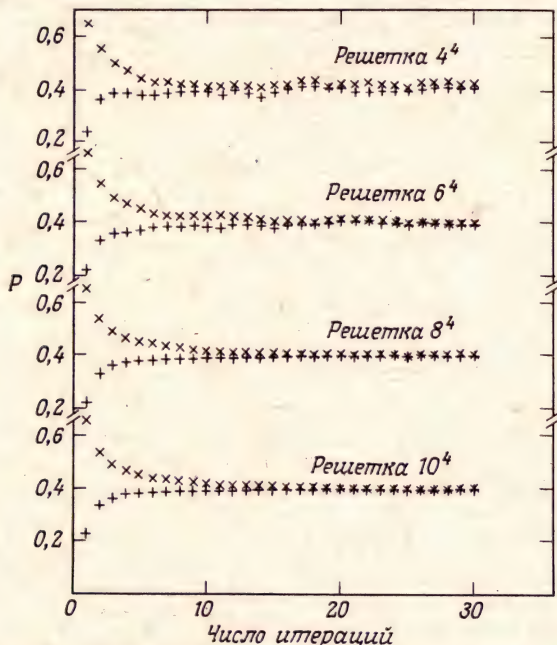


Рис. 18.1. Несколько серий результатов, полученных методом Монте-Карло для модели с группой симметрии $SU(2)$ [49].

ара к каждому ребру; на решетке размера 10^4 один такой шаг соответствует 40 000 новых элементов группы $SU(2)$. На рис. 18.1 показана зависимость от числа итераций среднего действия

$$P = \langle 1 - \frac{1}{2} \text{Tr } U_{\square} \rangle, \quad (18.25)$$

рассмотренного в гл. 9. На каждой из решеток использовались две начальные конфигурации. Символы $+$ соответствуют упорядоченному начальному состоянию, когда все матрицы, определенные на ребрах, равны единице. Такое состояние статистической системы соответствует старту при нулевой температуре. Символы \times соответствуют такой начальной конфигурации, когда каждый элемент выбран случайным образом равномерно на инвариантной мере по всей группе. В этом случае мы стартуем при бесконечной температуре. Таким образом, мы приближаемся к равновесию с противоположных сторон. Заметим, что во всех случаях сходимость прак-

тически достигается после 20 — 30 итераций. Тепловые флуктуации, которые всегда имеют место, заметны на малых решетках, но становятся малыми при числе узлов 10^4 .

Сходимость к равновесию становится существенно медленнее вблизи критической точки. Например, на рис. 18.2 показана зависимость среднего действия P от числа итераций в $U(1)$ -симметричной

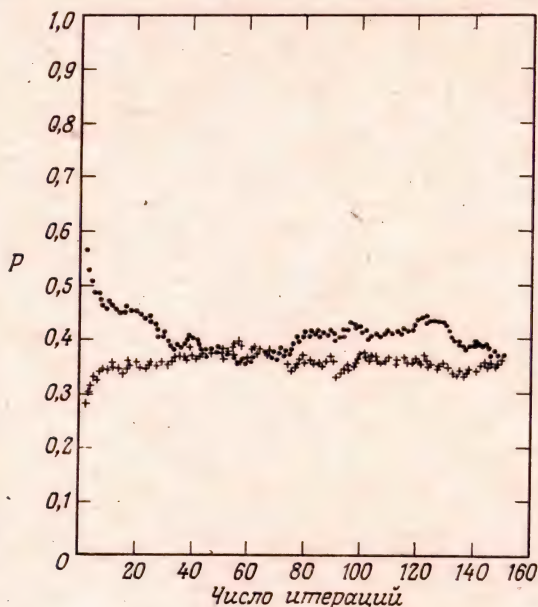


Рис. 18.2. Две серии результатов, полученных методом Монте-Карло для модели с группой симметрии $U(1)$ вблизи критической точки. Решетка 6^4 , $\beta = 1,0$. Упорядоченное (+) и случайное (·) начальные состояния.

теории на решетке 6^4 при $\beta = 1,0$. На бесконечной решетке в такой теории имеет место фазовый переход второго рода при $\beta = 1,012 \pm 0,005$ [22, 60, 126]. На рис. 18.2 видно, что имеет место не только медленная сходимость, но и заметные флуктуации, характерные для критического поведения.

Выше говорилось о двух самых простых начальных конфигурациях, соответствующих нулевой и бесконечной температурам. В случае перехода первого рода такие начальные состояния могут привести к тому, что решетка попадет в метастабильное состояние. Как и в реальном эксперименте, случайная (упорядоченная) решетка может быть переохлаждена (перегрета) до температуры существенно ниже (выше) температуры перехода и при этом не попасть в течение разумного времени в правильную фазу. Чтобы помочь в до-

стижении равновесия, можно добавить «зародыш», состоящий из упорядоченного (разупорядоченного) участка решетки. Это побуждает использовать третью интересную начальную конфигурацию, когда половина решетки упорядочена, а половина — разупорядочена. Например, ребра, выходящие из узлов, четвертая координата которых меньше половины решетки, могут быть разупорядочены,

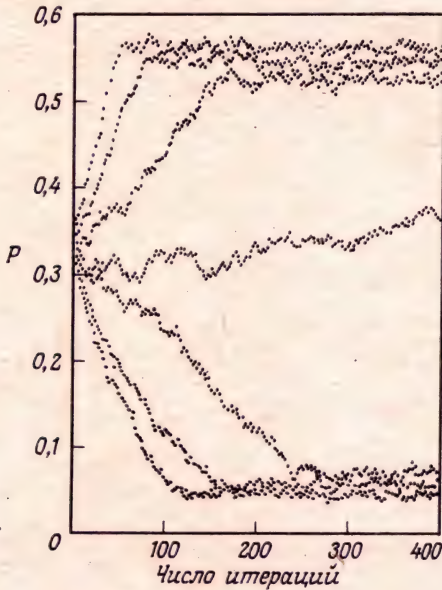


Рис. 18.3. Несколько серий результатов, полученных методом Монте-Карло для модели с группой Z_2 при смешанных начальных условиях. Серии измерений соответствуют значениям β от 0,41 до 0,47 (сверху вниз) с интервалом 0,01 [54].

а остальные — упорядочены. На рис. 18.3 показано несколько серий вычислений с алгоритмом Метрополиса при таком старте для группы Z_2 на решетке $20 \cdot 8^3$ [55]. Вычисления производились при нескольких значениях β , сосредоточенных вблизи точки фазового перехода (см. гл. 16). На рис. 18.3 хорошо видно медленное смещение, характерное для ситуации, когда одна фаза «растворяет» другую. Характер смещения вблизи точки перехода показывает, что температура перехода определяется довольно точно. Такой способ определения точки фазового перехода аналогичен способу нахождения температуры плавления льда, при котором наблюдают за льдом в сосудах с водой при различной температуре.

Тот факт, что вдали от точек фазовых переходов сходимость быстрая, а вблизи — медленная, наводит на мысль о другом типе

эксперимента. При нагревании и последующем охлаждении системы области медленной сходимости проявляются как области гистерезиса. Это дает метод быстрого определения областей, требующих дополнительного исследования. На рис. 18.4 показаны результаты таких термальных циклов в $SU(2)$ -модели для четырех и пяти пространственно-временных измерений и в $U(1) = SO(2)$ -теории для четырех измерений. Каждая точка получена после примерно

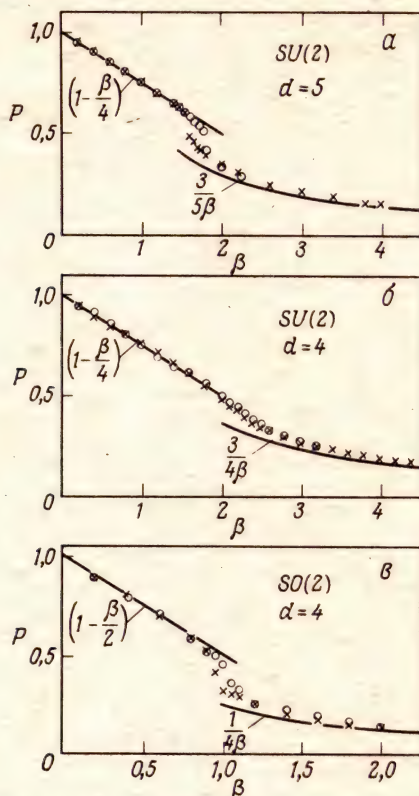


Рис. 18.4. Термальные циклы для нескольких моделей (крестики соответствуют нагреванию, а кружки — охлаждению) [47].

двадцати итераций с помощью алгоритма теплового резервуара в процессе нагревания или охлаждения системы. Для проверки нормировки приведены также результаты вычислений в низших порядках в приближениях сильной и слабой связи. Фазовых переходов можно ожидать в той области, где средние, полученные при нагревании и при охлаждении, не согласуются, как это ясно видно для пятимерной $SU(2)$ - и четырехмерной $U(1)$ -моделей. Дальнейший

анализ показывает, что в $U(1)$ -модели в этой области имеет место фазовый переход второго рода [126], а в пятимерной $SU(2)$ -модели — фазовый переход первого рода. Заметим, что во втором случае род фазового перехода совпадает с тем, что предсказывает приближение среднего поля, т. е. $d = 5$ в каком-то смысле близко к $d = \infty$. Это последнее заключение подтверждается также тем, что в пятимерной $U(1)$ -модели тоже имеет место фазовый переход первого рода [24].

Гистерезис на рис. 18.4, в сначала может показаться неожиданным, так как мы ожидаем перехода второго рода и внутренняя энергия должна быть непрерывной функцией температуры. Но термальный цикл осуществляется довольно быстро, и, как видно на рис. 18.2, несколько десятков итераций недостаточно для выхода на равновесное состояние вблизи критической точки. Действительно, повторение экспериментов этого типа с циклами разной скорости позволяет получить информацию о характере перехода. В случае выраженного перехода первого рода гистерезисная петля довольно стабильна по форме и относительно независима от скорости нагревания или охлаждения. Замыкание цикла определяется в основном температурами, при которых исчезают метастабильные минимумы свободной энергии. Напротив, цикл, соответствующий переходу второго рода, постепенно сжимается по мере того, как эксперимент становится более адиабатическим.

Четырехмерная $SU(2)$ -модель резко контрастирует с остальными системами на рис. 18.4. Для нее не видно никакой четкой структуры за исключением довольно быстрого перехода от области сильной связи к области слабой связи при значении β близком к 2. Тщательный анализ показывает, что здесь теплоемкость имеет четкий пик, но нет никакой сингулярности [127]. Это подтверждает ожидаемое отсутствие фазового перехода в данной неабелевой системе. На рис. 11.1 приведена внутренняя энергия для $SU(3)$ -модели, полученная методом Монте-Карло. В этом случае имеет место быстрая смена режима, подобная той, которая происходит в $SU(2)$ -модели.

Упражнения

1. Напишите программу метода Монте-Карло для вычислений в рамках одномерной модели Изинга. Вычислите внутреннюю энергию как функцию температуры и сравните с точным результатом.

2. Напишите программу, реализующую алгоритм метода теплового резервуара для модели с группой $U(1)$.

Метод Монте-Карло II

Рассматривая решетку лишь как средство для ультрафиолетового обрезания, мы хотели бы использовать метод Монте-Карло для вычисления физических величин в непрерывной теории поля. На первый взгляд не ясно, насколько хорошо это можно сделать, располагая решетками ограниченных размеров. Шаг решетки должен быть меньше характерных для адронной физики масштабов, тогда как размер решетки должен быть больше существенного для данной проблемы расстояния. Решетка с 10 узлами вдоль каждой оси дает мало возможностей для такого анализа. Кроме того, как показывает обсуждение ренормгруппы в гл. 13, следует ожидать экспоненциальной зависимости шага от константы связи. В лучшем случае для получения физических величин может быть полезна лишь узкая область значений константы связи.

Преодолеть этот пессимизм помогает тот замечательный факт, что скейлинговое поведение, предсказываемое асимптотической свободой, проявляется в экспериментах по глубоконеупругому рассеянию при довольно малых передачах импульса — порядка 2 ГэВ [152]. В итоге на решетке с числом узлов 10^4 можно получать интересные результаты для энергий до нескольких сотен МэВ, где существенную роль начинают играть силы, приводящие к конфайнменту. Поэтому можно надеяться связать между собой характерные особенности кварковой динамики на больших и на малых расстояниях.

Нужно вычислить величину, имеющую конечный непрерывный предел; другими словами, надо получить физическую наблюдаемую. Средняя грань, о которой шла речь при обсуждении метода Монте-Карло, пропорциональна среднему значению плотности действия и при вычислении по теории возмущений имеет ультрафиолетовые расходимости. Самой простой наблюдаемой, получаемой методом Монте-Карло, является коэффициент K перед линейно растущей частью межкваркового потенциала. Его можно найти, вычисляя большие вильсоновские петли и выделяя зависимость, соответствующую закону площадей (гл. 9). Измеряя расстояние в единицах шага решетки, можно вычислить безразмерную комбинацию $a^2 K$ как функцию голой константы g_0^2 . Если линейно растущий потенциал имеет место и в непрерывном пределе, то при малых значениях константы связи эта величина должна следовать предска-

ниям теории ренормгруппы в гл. 13:

$$a^2 K = (K/\Lambda_0^2) (\gamma_0 g_0^2)^{(-\gamma_1/\gamma_0^2)} \exp(-1/(\gamma_0 g_0^2)) (1 + O(g_0^2)). \quad (19.1)$$

Наоборот, подтверждение этой зависимости даст убедительное доказательство наличия линейно растущего потенциала и в том случае, когда обрезание снято.

В общем случае поведение вильсоновской петли может быть довольно сложным. Кроме части, подчиняющейся закону площадей и доминирующей в случае больших петель, должна быть периметрическая зависимость из-за собственных энергий кварковых источников, а также поправки на обмен глюонами поперек петли, вычисляемые по теории возмущений. При уменьшении связи и приближении к непрерывному пределу периметрическая часть расходится и дает доминирующий вклад для любой петли фиксированного размера. Поэтому удобно рассматривать отношения петель разных площадей, но одного периметра. В частности определим [50]

$$\chi(I, J) = -\ln \left(\frac{W(I, J) W(I-1, J-1)}{W(I, J-1) W(I-1, J)} \right), \quad (19.2)$$

где $W(I, J)$ — среднее от вильсоновской петли с размерами I, J . При этом периметрическая зависимость и постоянные множители сокращаются. Когда поведение петель определяется законом площадей, $\chi(I, J)$ прямо определяет натяжение струны:

$$\chi \rightarrow a^2 K. \quad (19.3)$$

Это происходит либо тогда, когда I и J велики, либо при больших значениях константы связи. Но в пределе слабой связи доминирующий вклад дает обмен глюонами, так что χ можно вычислить по теории возмущений, причем

$$\chi(I, J) = O(g_0^2). \quad (19.4)$$

Например, разложение в ряд теории возмущений по малой константе связи для петли размером один на один имеет вид

$$\chi(1, 1) = \begin{cases} 3g_0^2/16 + O(g_0^4), & SU(2) \\ g_0^2/3 + O(g_0^4), & SU(3). \end{cases} \quad (19.5)$$

Такое степенное поведение заметно отличается от имеющего существенную сингулярность выражения (10.9). Таким образом, мы ожидаем, что для сильной связи все $\chi(I, J)$ дают коэффициент перед площадью, но при уменьшении g_0^2 петли меньших размеров приводят к значениям χ , отличающимся от $a^2 K$. Кривые $\chi(I, J)$ для всех I и J должны иметь огибающую, соответствующую $a^2 K$. В пределе слабой связи эта огибающая имеет вид (19.1).

На рис. 19.1 показана зависимость $\chi(I, I)$ от g_0^{-2} при $I = 1, \dots, 4$ для группы $SU(2)$. В области сильной связи для больших петель относительные ошибки велики, но значения χ согласуются со значениями, полученными для меньших петель. Показано также поведение в пределе сильной связи

$$a^2 K = \ln(g_0^2) + O(g_0^{-4}). \quad (19.6)$$

Поведение в области слабой связи в соответствии с (19.1) представлено в виде полосы для равных Λ_0 в интервале

$$\Lambda_0 = (1.3 \pm 0.2) \times 10^{-2} K^{\frac{1}{2}}, \quad SU(2). \quad (19.7)$$

Выбор величины этого интервала является чисто субъективным.

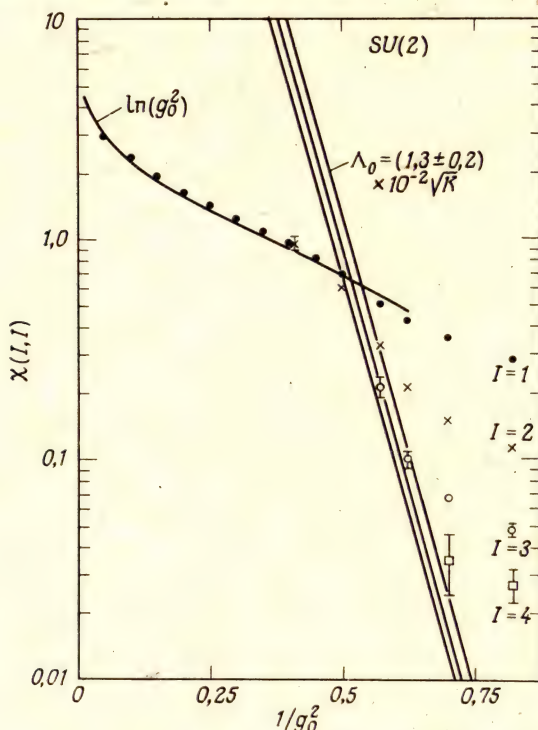


Рис. 19.1. Зависимость $\chi(I, I)$ от $1/g_0^2$ для теории с группой симметрии $SU(2)$ [50].

На рис. 19.2 приведены результаты вычислений тех же величин на решетке 6^4 для группы $SU(3)$ [57]. На этой меньшей решетке размеры петель не превышали 3×3 . Разложение по обратной константе связи в этой теории дает

$$a^2 K = \ln(3g_0^2) + O(g_0^{-2}). \quad (19.8)$$

Заметим, что в $SU(3)$ -теории поправочные члены в (19.8) порядка $1/g_0^2$, тогда как в $SU(2)$ -теории — порядка $1/g_0^4$ (см. (19.6)). Полоса значений Λ_0 в формулах для слабой связи теперь имеет вид

$$\Lambda_0 = (6.0 \pm 1.0) \times 10^{-3} K^{\frac{1}{2}}, \quad SU(3). \quad (19.9)$$

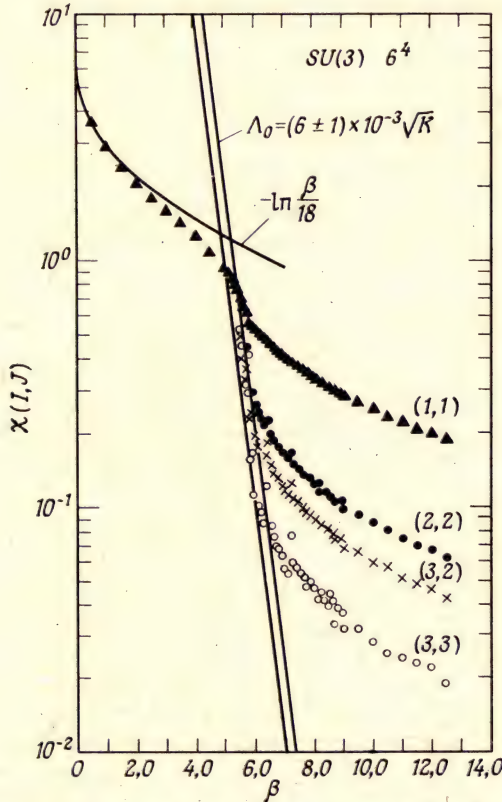


Рис. 19.2. Зависимость $\lambda(I, J)$ от β для теории с группой симметрии $SU(3)$ [57].

Первоначально эти малые значения вызывали удивление, поскольку они возникают в теориях без малых безразмерных параметров. Однако Λ_0 сильно зависит от перенормировочной схемы (см. гл. 13). В работе [96] устанавливается связь между параметром Λ_0 и более привычным параметром Λ_R , определяемым с помощью трехточечной вершинной функции в фейнмановской калибровке

$$\Lambda_R = \begin{cases} 57.5\Lambda_0, & SU(2) \\ 83.5\Lambda_0, & SU(3). \end{cases} \quad (19.10)$$

Эти большие множители компенсируют малые значения Λ_0 .

Чтобы сравнивать эти результаты с экспериментами, необходимо иметь какое-то ожидаемое значение K . Это значение дает модель струны [83], в которой вращающаяся струна порождает реджевскую траекторию состояний частиц. Наклон этой траектории связан с натяжением струны:

$$\alpha' = (2\pi K)^{-1}. \quad (19.11)$$

Используя феноменологическое значение $\alpha' = 1,0 \text{ ГэВ}^{-2}$, получим

$$\sqrt{K} = 400 \text{ МэВ} = \sqrt{14} \text{ т}. \quad (19.12)$$

В результате получаем для Λ_R :

$$\Lambda_R = 200 \pm 35 \text{ МэВ}. \quad (19.13)$$

Мы получили вполне разумное значение Λ_R , согласующееся с оценками, полученными из других соображений. Следует, отметить, однако, что при этом мы не учитывали вклад кварковых петель.

Несмотря на эти неопределенности проведенный анализ позволяет определить физический параметр, устанавливая связь двух пределов. Параметр Λ связан со скейлинговым поведением на малых расстояниях, а K соответствует конфайнменту на больших расстояниях. Их отношение невозможно получить с помощью теории возмущений; это число характеризует нетривиальную четырехмерную теорию поля.

Другая величина, которую можно определить методом Монте-Карло, — корреляционная длина (массовая щель), обсуждавшаяся в гл. 9. В чисто глюонной теории эта величина совпадает с минимальной массой связанного состояния («глюоболлом»). В принципе массу глюоболла можно определить, изучая поведение коррелятора двух источников, разнесенных на большое расстояние. Такого рода попытки предпринимались (см., например, работу [27]), однако большого успеха добиться не удалось из-за статистических ошибок. Более перспективным представляется использование вычислений методом Монте-Карло в комбинации с вариационным методом. Для коррелятора двух граней на расстоянии в 1 или 2 шага решетки существенны вклады с более чем однократным обменом легчайшим состоянием. Это означает, что подгонка с помощью юкавского закона позволяет оценить лишь верхнюю границу массы глюоболла. Используя линейную комбинацию простых операторов, например петель длиной до 6 ребер решетки, и находя комбинацию, которая минимизирует коррелятор, можно получить разумную оценку. Фактически это означает, что мы строим оператор, который выделяет желаемое состояние из спектра. Такой анализ еще упрощается выделением состояний с нулевым импульсом, что легко сделать, суммируя по сдвигам, перпендикулярным прямой, соединяющей источники.

Производя такие вычисления при нескольких значениях константы связи, можно найти безразмерное (в единицах шага решетки) значение корреляционной длины. Как и для натяжения струны, можно проверить наличие экспоненциальной зависимости, предсказываемой ренормгруппой. Коэффициент в этой зависимости есть масса глюболла в единицах параметра Λ_0 . Использование операторов с определенными дискретными симметриями позволяет обобщить метод так, чтобы определять массы легчайших состояний с заданным набором квантовых чисел.

Этот метод был развит [19—21, 101] для $SU(2)$ - и $SU(3)$ -теорий. Для самого легкого состояния в $SU(3)$ -теории

$$m/\Lambda_0 = 300\text{--}350. \quad (19.14)$$

Отсюда следует, что масса самого легкого глюболла равна 700—1000 МэВ; для других глюболлов массы порядка 1—2 ГэВ. Напомним, что в этих вычислениях не учтен вклад кварковых петель.

Перейдем теперь к третьему физическому параметру, который можно получить методом Монте-Карло, но труднее сравнить с результатами экспериментов. В гл. 3 отмечено, что решетка, имеющая конечный размер во временном направлении, соответствует квантостатистической системе с ненулевой температурой. Таким образом, использование 4-мерной решетки, которая в одном направлении меньше, чем в других, позволяет изучать квантовую статистику неабелевых полей. Размер решетки во временном направлении можно изменить двумя способами: либо уменьшить число узлов, либо изменить шаг в этом направлении, вводя другую константу связи, как в гл. 15 для гамильтонова формализма.

Исследования при конечных температурах представляют интерес, поскольку есть основания ожидать фазовых переходов [156, 162]. При низких температурах должен быть вакуум с конфайнментом кварков с температурными флуктуациями, порождающими разреженный газ глюболлов, но при высоких температурах вакуум может быть заполнен трубками тока, среди которых лишняя трубка от нечетного кварка будет быстро потеряна. Поэтому мы ожидаем перехода к фазе деконфайнмента, в которой кварки могут свободно удаляться друг от друга.

Мы можем рассматривать нашу систему в какой-то момент времени с точки зрения классической статистической механики трехмерного набора переменных, определенных на ребрах. Фазовые переходы типа конфайнмент—деконфайнмент связаны со спонтанным нарушением глобальной симметрии. Рассмотрим пространственно-подобную гиперповерхность, проходящую через узлы этого набора. Умножим каждую переменную, соответствующую ребру на этой

поверхности, на элемент из центра калибровочной группы, например на -1 в случае группы $SU(2)$. Любая грань должна пересекать эту гиперповерхность четное число раз, в двух возможных направлениях; при этом дополнительные множители сократятся. Таким образом, действие для статистической системы имеет глобальную симметрию относительно центра калибровочной группы.

Чтобы изучить эту симметрию, определим вильсоновскую петлю с ненулевым числом обходов во времениподобном направлении на периодической решетке. Простейшая такая петля есть просто след от произведения всех времениподобных ребер, соответствующих одной точке в трехмерном пространстве. В нашей тороидальной геометрии такая петля в действительности является прямой линией, или «вильсоновской линией». Такие петли должны пересекать пространственноподобную гиперповерхность нечетное число раз и, таким образом, не инвариантны относительно преобразований из группы глобальной симметрии. Таким образом, мы имеем параметр порядка в том смысле, что сигналом перехода к фазе деконфайнмента служит появление спонтанной «намагниченности» у таких петель.

Кваркоподобный источник на решетке должен порождать периодическую мировую линию вдоль одной из петель. Для отдельного кварка произведение переменных, соответствующих ребрам на этой мировой линии, определяет взаимодействие калибровочного поля с источником. Нулевое среднее для петли указывает на бесконечную энергию кварка в фазе конфайнмента. Наоборот, отличная от нуля «намагниченность» соответствует конечной энергии кварка, взаимодействующего с калибровочным полем.

Чтобы понять, что такой переход возможен, рассмотрим предельный случай решетки с размером 1 шаг во временном направлении. «Вильсоновская линия» в каждом узле вырождается в след одного времениподобного ребра. По существу эта переменная становится подобной спину. Действительно, для абелевых групп эти «спины» не связаны с пространственноподобными петлями, и мы получаем спиновую модель в трех измерениях с взаимодействием ближайших соседей. В общем случае такие модели имеют ферромагнитные переходы. В случае неабелевой симметрии остается связь между времениподобным и пространственноподобным ребрами, и мы имеем калибровочную модель с глобальной симметрией, которая может спонтанно нарушаться.

Мы обсуждали переход к фазе деконфайнмента в чисто глюонной теории без динамических кварков. Замечательно, что плазма из трубок тока настолько сложна, что может экранировать источник, соответствующий нетривиальному представлению центра калибро-

вочной группы. Это невозможно сделать с конечным числом глюонов, каждый из которых находится в присоединенном представлении и не связан с центром группы. Заметим, что источник в присоединенном представлении, напротив, может быть экранирован в обеих фазах. В полной теории, включающей кварковые петли, пары кварков всегда могут «выскочить» из вакуума и экранировать источник. В этом случае не ясно, что является параметром порядка, хотя, по-видимому, переход к фазе деконфайнмента имеет место и при учете динамических кварков.

Несколько авторов [72, 105, 122, 134] использовали «вильсоновские линии» для определения критических температур перехода к фазе деконфайнмента в $SU(2)$ - и $SU(3)$ -теориях. Изменяя голую константу связи и число узлов вдоль временной оси, можно сравнить безразмерное произведение критической температуры и шага решетки с предсказанием ренормгрупповой теории аналогично тому, как это делалось для натяжения струны и массовой щели. Для $SU(3)$ имеем

$$T_c/\Lambda_0 \approx 90 \quad (19.15)$$

откуда получаем

$$T_c \approx 200 \text{ МэВ}. \quad (19.16)$$

Это значение мало по сравнению с оценками масс глюоболлов. Так как мы рассматриваем теорию без кварков, легчайшие состояния над вакуумом имеют большие энергии по сравнению с (19.16). Это означает, что ниже температуры перехода вакуум совершенно пуст, и температурные флуктуации возбуждают лишь отдельные глюоболлы.

Еще нет ответа на интересный вопрос о типе фазового перехода [164]. В случае модели с группой симметрии $SU(2)$ имеет место спонтанное нарушение симметрии Z_2 и по аналогии с моделью Изинга можно ожидать наличия фазового перехода второго рода. Однако в случае группы $SU(3)$ ситуация более сложная. Для $SU(3)$ -симметричной теории речь идет о спонтанном нарушении симметрии Z_3 . Приближение среднего поля предсказывает для Z_3 -систем переходы первого рода (см. упр. 1 в гл. 14). Поскольку размерность 3 выше чем критическая размерность для систем с дискретной симметрией, это предсказание вполне правдоподобно. Действительно, простая спиновая Z_3 -модель, называемая трехкомпонентной моделью Поттса [157], в трехмерном случае имеет фазовый переход первого рода, хотя скрытая теплота довольно мала [29]. Вычисления методом Монте-Карло пока еще не прояснили этот вопрос¹⁾,

¹⁾ В настоящее время этот вопрос считается выясненным: в $SU(3)$ -теории имеет место фазовый переход первого рода [186*—188*]. — Прим. перев.

который может быть весьма существенным при исследовании проблем эволюции ранней Вселенной.

Температуры такого порядка как (19.16) в принципе достижимы на короткое время на современных ускорителях при соударениях тяжелых ионов. Но вопрос о применимости результатов вычислений к этому случаю остается открытым по двум причинам. Во-первых, при высоких энергиях существенную роль играют кварки с высокими плотностями, тогда как монтекарловские вычисления проводились в чисто калибровочной теории. Во-вторых, критическая температура (19.16) выше, хотя и ненамного, некоторой гипотетической максимальной температуры порядка 140 МэВ, при которой происходит массовое рождение пионов, уносящих всю кинетическую энергию сверх этого уровня [92]. Действительно, до того как будет достигнута температура, при которой происходит переход к фазе деконфайнмента, могут происходить другие фазовые переходы, связанные с физикой пионов и (или) с нарушением киральной симметрии [114]. В любом случае область температур порядка нескольких сотен МэВ является многообещающей с точки зрения дальнейших экспериментальных исследований.

До сих пор при обсуждении вычислений методом Монте-Карло мы избегали вопроса об учете фермионов. Эта область исследований очень быстро развивается, так что очень возможно, что все сказанное ниже в этой главе очень скоро окажется устаревшим. Основная проблема, связанная с включением фермионов в процедуру численных расчетов, связана с тем, что соответствующий функциональный интеграл не сводится к обычной сумме, а представляет собой некоторое сложное отображение пространства антикоммутирующих переменных в комплексные числа. Действительно, экспоненцированное действие уже не есть просто число, а представляет собой некоторый оператор, и его нельзя непосредственно сравнивать с вещественными случайными числами.

Эта трудность может быть преодолена (может быть не лучшим образом), если сначала проинтегрировать по антикоммутирующим переменным аналитически. Если действие квадратично по фермионным переменным (как обычно бывает), то интегрирование по ним приведет к появлению детерминанта, как обсуждалось в гл. 5. В результате остается вычислить интеграл обычного типа по калибровочным полям, что можно в принципе сделать методом Монте-Карло. Проблема заключается в том, что это детерминант от очень большой матрицы, число строк которой равно произведению числа узлов на число степеней свободы, связанных со спином, цветом и ароматом. Для решеток интересующего нас размера размерность этой матрицы равна многим тысячам. Поскольку время, не-

обходимое для вычисления детерминанта такой матрицы пропорционально кубу ее размерности, непосредственное вычисление заняло бы слишком много времени. Кроме того, при таком подходе этот детерминант необходимо вычислять каждый раз после обновления переменной на очередном ребре решетки. Таким образом, этот детерминант от огромной матрицы потребовалось бы вычислять много тысяч раз.

В действительности эти трудности могут быть до некоторой степени преодолены. Матрица, о которой шла речь выше, сильно разрежена, т. е. большая часть ее элементов равна нулю. Благодаря локальности действия полевая переменная на каждом ребре связана лишь с конечным числом других переменных. Обновление поля на каждом ребре меняет лишь сравнительно небольшое число матричных элементов. При использовании алгоритма Метрополиса [138], в котором новое значение переменной лежит достаточно близко к старому, на каждом шаге необходимо производить лишь небольшие изменения небольшого числа элементов матрицы. Для вычисления необходимо иметь обратную матрицу, но к счастью, поскольку при вычислениях в любом случае возникает статистическая ошибка, нет необходимости вычислять эту обратную матрицу точно. В настоящее время интенсивно разрабатываются различные методы приближенного вычисления обратной матрицы, например, итерационная схема [175], псевдофермионный метод [80, 160] и метод случайных блужданий [121].

Тем не менее, вычисления с фермионами все же требуют очень больших затрат машинного времени. Часто при вычислениях спектра адронов используется следующее приближение [95, 132, 174]. Вместо того, чтобы производить вычисления детерминанта большое число раз с целью учета обратного воздействия фермионов на калибровочное поле, можно вычислять обратную матрицу, зависящую от калибровочного поля, генерируя конфигурации калибровочного поля с помощью чисто калибровочного действия (не содержащего кварков). Таким способом можно описать распространение кварка в заданном фоновом поле. При этом основное приближение заключается в пренебрежении обратным влиянием фермионов на калибровочное поле. На языке теории возмущений это означает отбрасывание всех диаграмм, содержащих внутренние кварковые петли. В каком-то смысле это соответствует пределу с нулевым числом ароматов.

Вычисляя среднее от произведения пропагаторов, можно изучать распространение связанного состояния (кварков и глюонов) с различными квантовыми числами. Пренебрежение внутренними петлями в таких системах соответствует учету только валентных

кварков и отбрасыванию кварков «моря» в простой кварковой модели. Тот экспериментальный факт, что приближение валентных кварков работает довольно хорошо, говорит о том, что обсуждаемая аппроксимация разумна. Внутренние петли приводят к расщеплению масс ω - и ρ -мезонов, которое представляет собой довольно малый эффект. Если смотреть на это приближение с менее оптимистической точки зрения, то следует заметить, что пренебрежение виртуальными парами кварков не учитывает распад ρ -мезона.

Значения масс получаются с помощью вычисления поведения мезонных и кварковых пропагаторов на больших расстояниях. В исходное действие входят два параметра — голая масса кварка и голый заряд, которые связаны с шагом решетки через уравнения ренормгруппы. Таким образом, чтобы определить эти параметры, необходимы две массы. В качестве одной из них часто берут массу π -мезона, а в качестве другой — массу ρ -мезона или наклон траектории Редже. Наиболее удивительным обстоятельством является тот факт, что в таких вычислениях удается получить массу пиона, много меньшую, чем массы остальных адронов, которые порядка 1 ГэВ. Вычисления указывают на наличие спонтанного нарушения киральной симметрии, причем пион выступает в роли голдстоуновского бозона. Заметим, что обычно такую частицу рассматривают как когерентное возбуждение вакуума, которое представляет собой конденсат элементарных составляющих пар. Интересно, что такой результат получается при использовании приближения, в котором вкладом в пионный пропагатор от кварковых петель пренебрегается.

С помощью этого приближения можно получить ряд других предсказаний. Из вычисления вершинных функций для валентных кварков можно получить информацию о магнитных моментах, формфакторах, ширинах распадов. Важно заметить, что с помощью этой процедуры трудно получить сильное смешивание с чисто глюонными состояниями, как это, по-видимому, должно быть в случае η - и η' -мезонов.

Как упоминалось выше, применение метода Монте-Карло в теориях с фермионами быстро развивается. Можно надеяться, что описанные выше трудности, связанные с включением фермионов, скоро будут преодолены благодаря развитию новых подходов, а также появлению новой вычислительной техники.

Упражнение

1. Выведите соотношение (19.11) между наклоном траектории Редже и натяжением струны.

За пределами вильсоновского действия

Регуляризация ультрафиолетовых расходимостей является в высшей степени неоднозначной процедурой. Даже в рамках решеточного подхода существуют многочисленные варианты построения регуляризованной теории. Несколько десятилетий успешного развития пертурбативной квантовой электродинамики привели к убеждению, что после снятия любой регуляризации мы должны получить единственную перенормированную теорию, зависящую только от небольшого числа констант взаимодействия и масс. Действительно, перенормируемость часто рассматривается как одно из основных условий, которым должны удовлетворять модели фундаментальных взаимодействий.

Но на непертурбативном уровне открытым остается вопрос даже о самом существовании теории в четырехмерном пространстве-времени, а не только о ее единственности. В некоторых случаях теория может зависеть даже от меньшего числа параметров, чем предполагается при анализе по теории возмущений; например, как обсуждалось в гл. 13, в янг-миллсовских теориях должно существовать свойство размерной трансмутации, причем безразмерные коэффициенты определяются независимо от констант взаимодействия.

Метод Монте-Карло дает возможность непертурбативного исследования зависимости от параметра обрезания. Таким образом, мы можем начать с численных методов при исследовании вопроса о единственности непрерывного предела. В этой главе мы рассмотрим с точки зрения универсальности некоторые несложные варианты вильсоновской схемы.

Простой альтернативой модели Вильсона является модель, в которой калибровочное поле A_μ помещено в узел решетки, и решеточное действие получается из действия в континууме заменой производных на конечные разности. Подобным образом получается решеточное действие для скалярных полей, рассмотренное в гл. 4. Результат отличается от обычной решеточной калибровочной теории в двух отношениях. Во-первых, теория с обрезанием не имеет точной локальной симметрии. Это обстоятельство не играет большой роли, если члены, нарушающие симметрию, достаточно быстро исчезают в непрерывном пределе, но это затрудняет перенормировоч-

ную процедуру. Во-вторых, область интегрирования по полевым переменным перестает быть компактной. Функциональный интеграл не будет в этом смысле хорошо определенной величиной, если не фиксирована калибровка. По этим причинам в рамках этой схемы проведено мало работ, хотя в работе [149] были выполнены некоторые предварительные вычисления методом Монте-Карло. При этом зависимости, соответствующей закону площадей для больших петель, пока обнаружить не удалось. Но, возможно, это обусловлено перенормировкой голого заряда, благодаря которой линейный рост потенциала замечен лишь при очень больших значениях константы связи.

Оставаясь ближе к духу вильсоновского подхода, Эдгар [68] рассматривал модель, в которой действие представляет собой сумму не по граням, а по вильсоновским петлям размера два на один. В случае двумерного пространства-времени и калибровочной группы Z_2 эта модель эквивалентна модели Изинга, поэтому в ней должен быть фазовый переход в отличие от двумерной модели Вильсона, которая оказалась тривиальной. Модель имеет некоторые дополнительные глобальные симметрии, которые могут быть нарушены; действительно, Эдгар обнаружил фазовый переход первого рода в этой «оконной» модели с калибровочной группой $SU(2)$ в четырехмерном пространстве-времени. Отсюда следует вывод, что сам факт наличия или отсутствия фазового перехода не является универсальным свойством калибровочной группы. Как мы увидим ниже в этой главе, вариация действия может приводить к новым решеточным артефактам, если шаг решетки не является достаточно малым.

Приближаясь еще более к теории Вильсона, можно рассматривать действие как функцию на классе элементов группы, каждый из которых связан с гранью, и менять вид самой функции. Мы уже делали это в каком-то смысле, когда обсуждали дуальность и рекурсионные соотношения Мигдала — Каданова; здесь мы рассмотрим другие обобщения. Мантон [131] предложил особенно простую альтернативу, выбрав в качестве действия на одну грань величину

$$S_{\square}(U) = \beta d^2(U, I), \quad (20.1)$$

где $d(U, I)$ — минимальное расстояние на групповом многообразии между элементом U и единичным элементом I . Понятие расстояния на групповом многообразии формулируется с помощью метрического тензора, упомянутого кратко в гл. 8. Эта метрика является единственной с точностью до общего нормирующего множителя. В

случае группы $SU(2)$ расстояние есть просто

$$d(U_1, U_2) \propto \arccos(\frac{1}{2} \text{Tr}(U_1 U_2^{-1})). \quad (20.2)$$

Мантоновское действие удобно при аналитических вычислениях в пределе слабой связи. Но оно сингулярно для тех элементов, которые находятся на максимальном расстоянии от единичного элемента, например $-I$ в случае группы $SU(2)$. Любопытным последствием этой сингулярности является тот факт, что матрица переноса никогда не является положительно определенной [89].

Другим обобщением, близким по духу, но отличающимся в деталях от мантоновского действия, является действие «теплового ядра», или обобщенное действие Виллена [65, 136, 170]. Оно выбирается таким образом, чтобы больцмановский множитель, или экспоненцированное действие,

$$B(U_{\square}) = \exp(-S_{\square}(\beta, U_{\square})) \quad (20.3)$$

имел резкий пик в окрестности единичного элемента в пределе слабой связи и в то же время давал равномерное распределение на группе в пределе сильной связи. Это аналогично тому, как происходит эволюция распределения температуры в образце, имитирующем групповое многообразие, если в начальный момент времени это распределение имеет острый пик. С течением времени этот температурный пик начинает размываться, и в конце концов распределение становится равномерным по всей области. Этим соображениям можно придать математически корректную форму, если воспользоваться теоретико-групповым обобщением лапласиана, чтобы написать уравнение теплопроводности. В гл. 8 введено понятие метрического тензора, который имеет вид

$$M_{ij} = \text{Tr}(g^{-1}(\partial_i g) g^{-1}(\partial_j g)), \quad (20.4)$$

где производные берутся по переменным α_i , параметризующим группу. На этом языке инвариантный оператор Лапласа дается стандартной формулой дифференциальной геометрии

$$\nabla^2 = \det(M)^{-\frac{1}{2}} (\partial/\partial \alpha_i) \det(M)^{\frac{1}{2}} M_{ij}^{-1} (\partial/\partial \alpha_j). \quad (20.5)$$

Теперь определим уравнение теплопроводности в виде

$$\nabla^2 K(t, g) = -(d/dt) K(t, g), \quad (20.6)$$

где для удобства коэффициент диффузии выбран равным единице.

Начальное условие выберем в виде

$$K(0, g) = \delta(g, I). \quad (20.7)$$

Действие теплового ядра отождествляется с решением этого уравнения следующим образом:

$$e^{S_{\square}(\beta, U)} = K(1/\beta, U). \quad (20.8)$$

С технической точки зрения это действие более удобно, чем мантоновское, поскольку является гладким на всем групповом многообразии, а также приводит к положительно определенной матрице переноса.

Как мантоновское действие, так и действие теплового ядра использовались при проведении вычислений методом Монте-Карло [123]. Натяжение струны определялось так, как это было описано в гл. 19. Для того чтобы сравнить результаты вычислений с результатами, полученными в рамках вильсоновского подхода, необходимо определить схемную зависимость параметров по теории возмущений. В результате оказалось, что отклонение от теоретических значений отношений этих параметров составляет 20—40%, если исходить из предположения, что физическое натяжение струны одинаково для всех действий. Наличие такого отклонения можно объяснить тем, что шаг решетки в практических расчетах приходится брать довольно большим, в результате чего оказываются существенными высшие члены разложения в ренормгрупповой функции.

Фазовая структура $SU(2)$ -симметричной теории качественным образом изменится, если полевые переменные, соответствующие граням, выбрать в присоединенном представлении [86, 93]. Фактически это означает, что приходится работать с группой симметрии $SO(3)$. На рис. 20.1 показан тепловой цикл для этой модели на решетке размера 5^4 . На рис. 20.2 изображена зависимость среднего действия на одну грань от числа итераций в методе Монте-Карло в точке фазового перехода для двух разных стартов — упорядоченного и разупорядоченного. Эти два рисунка ясно указывают на наличие фазового перехода первого рода.

В классическом непрерывном пределе $SO(3)$ - и $SU(2)$ -симметричные теории полностью идентичны. Они различаются только из-за разных глобальных свойств этих теорий, которые проявляются, когда вследствие квантовых флуктуаций переменные, соответствующие граням, начинают сильно отличаться от единицы. Новый фазовый переход является не чем иным, как решеточным артефактом, который возникает, когда шаг решетки не мал.

Это аналогично ситуации с «оконным» действием, обсуждавшимся выше.

Одно из возможных объяснений фазового перехода в $SO(3)$ -симметричной модели связано с возбуждением Z_2 -монополей. Дело в том, что в $SO(3)$ -представлении группы $SU(2)$ полевые переменные инвариантны относительно преобразований из центра группы

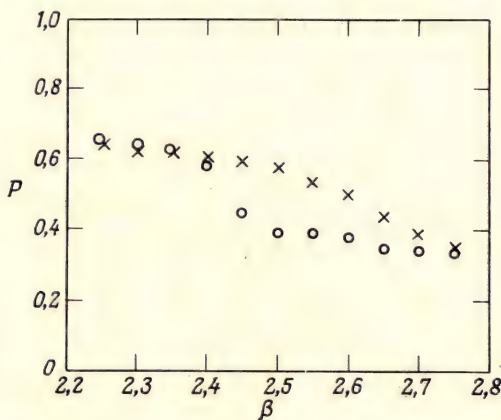


Рис. 20.1. Термальный цикл для теории с группой симметрии $SO(3)$ на решетке 5^4 (кружки соответствуют нагреванию, а крестики — охлаждению) [25].

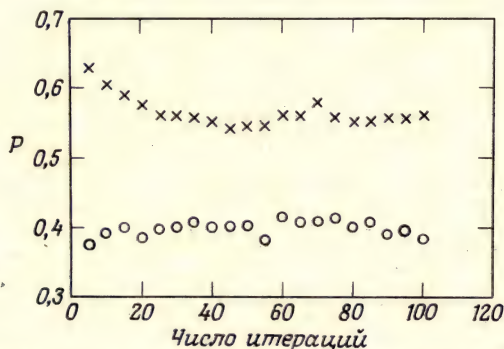


Рис. 20.2. Две серии результатов, полученных методом Монте-Карло для решеточной $SO(3)$ -калибровочной теории при температуре перехода ($\beta = 2,5$); кружки соответствуют упорядоченному старту, крестики — разупорядоченному [25].

Z_2 . Если полевая переменная, соответствующая грани, в $SU(2)$ -симметричной теории принимает значения, близкие к -1 , то энергия системы будет такой же, как в том случае, когда эта полевая переменная близка к 1 . Этот факт может быть использован для

определения дираковской струны как последовательности граней со значениями соответствующей полевой переменной вблизи $-I$. Для уточнения этой идеи было предложено несколько тесно связанных схем [34, 94, 129, 168]. Мы будем следовать работе Холлидея и Швиммера [94], в которой предложена небольшая модификация подхода. Для того чтобы перейти к действию, не зависящему от переменных из центра группы, удобно ввести набор новых переменных $\{\sigma_\square\}$, каждая из которых соответствует определенной грани и принимает значения из $Z_2 = \{1, -1\}$. Новая статистическая сумма есть

$$Z = \sum_{\{\sigma_\square\}} \int (dU) \exp \left(\sum_\square \beta \sigma_\square \text{Tr}(U_\square) \right). \quad (20.9)$$

Так как действие линейно по $\{\sigma_\square\}$, то по ним можно просуммировать. В результате получим

$$Z = \int (dU) \exp \left(\sum_\square S_\square(U_\square) \right), \quad (20.10)$$

где

$$S_\square(U) = \log(2 \cosh(\beta \text{Tr } U)). \quad (20.11)$$

Поскольку эта величина является четной функцией $\text{Tr } U$, она не зависит от центра группы. Вычисления методом Монте-Карло [94] показали, что в этом варианте $SO(3)$ -теории также имеется фазовый переход первого рода.

Переменная σ_\square по существу есть переменная дираковской струны; когда она положительна, значения U_\square группируются вблизи единицы, а когда отрицательна, предпочтительные значения U_\square сосредоточены вблизи $-I$. Точное положение дираковской струны не имеет определенного физического смысла, поскольку она всегда может быть смещена простым включением множителя -1 в определение полевой переменной, связанной с ребром. Но концы струны при этом не смещаются; следовательно, естественное определение монополя заключается в следующем: нужно пересчитать число отрицательных переменных струны, «входящих» в произвольный трехмерный куб, и если это число нечетное, то мы говорим, что в кубе есть монополю. На четырехмерной решетке монополю соответствует мировая линия, а струна замечает мировую поверхность. Холлидей и Швиммер вычислили плотность мировых линий монополей и обнаружили резкий скачок при температуре перехода. Плотность монополей не является параметром порядка, таким, как намагниченность в спиновых моделях, поскольку из-за тепловых

флуктуаций она никогда не обращается в нуль при какой-либо конечной температуре. Тем не менее эта величина оказывается весьма полезной для описания физики фазового перехода.

Монополи могут быть легко подавлены, если ввести в действие для них массовый член. Статистическая сумма для такого действия имеет вид

$$Z = \sum_{\{\sigma_{\square}\}} \int (dU) \exp \left(\sum_{\square} \beta \sigma_{\square} \text{Tr}(U_{\square}) + \lambda \sum_c \prod_{\square \in c} \sigma_{\square} \right), \quad (20.12)$$

где вторая сумма в показателе экспоненты берется по всем трехмерным кубам на решетке. Появление монополя в каком-либо кубе теперь подавлено множителем $e^{-2\lambda}$. При увеличении λ произведение странных переменных, соответствующих поверхности какого-либо куба, стремится к единице. Простое упражнение показывает, что в этом случае существует набор Z_2 -переменных, соответствующих ребрам, таких, что любая величина σ_{\square} является произведением этих переменных, определенных на границах грани. В этом случае все Z_2 -множители поглощаются переменными, определенными на ребрах, что можно сделать в теории с $SU(2)$ -инвариантной мерой. В результате мы приходим к обычной $SU(2)$ -теории, в которой, по видимому, нет фазовых переходов. Если перейти к пределу $\beta \rightarrow 0$ в выражении (20.12), то мы придем к довольно сложно выглядящей Z_2 -теории. Однако при преобразованиях дуальности, как это обсуждалось в гл. 16, эта модель переходит в обычную четырехмерную модель Изинга, имеющую фазовый переход второго рода. Холлидей и Швиммер с помощью вычислений методом Монте-Карло показали, что с увеличением λ $SO(3)$ -переход смещается в область меньших β и, в конце концов, превращается в изинговский фазовый переход. Где фазовый переход первого рода превращается в фазовый переход второго рода, мы не знаем.

Альтернативный способ подавить монополи заключается в добавлении к действию в (20.9) эффективного потенциала для переменных σ_{\square} . Тогда мы можем написать

$$Z = \sum_{\{\sigma_{\square}\}} \int (dU) \exp \left(\sum_{\square} \beta \sigma_{\square} \text{Tr}(U) + \eta \sum_{\square} \sigma_{\square} \right). \quad (20.13)$$

В пределе бесконечного η все σ_{\square} стремятся к единице, и мы возвращаемся к чистой $SU(2)$ -теории. Так как σ_{\square} — переменная дираковской струны, новый член добавляет эффективную энергию на единицу длины струны. При ненулевых значениях η струна становится

физической, поскольку ее смещение приводит к изменению полного действия пропорционально полному изменению длины.

Действие в (20.13) линейно по σ_{\square} . Можно просуммировать по этим переменным, так что останутся только переменные U_{\square} , как в (20.10), но теперь

$$S_{\square}(U) = \log(2 \cosh(\beta \operatorname{Tr} U + \eta)). \quad (20.14)$$

В отличие от (20.11) выражение (20.14) не является нечувствительным к центру группы. Разлагая это действие по характерам

$$S_{\square}(U) = \sum_R \beta_R \chi_R(U), \quad (20.15)$$

мы получим члены, соответствующие представлениям $SU(2)$, как с целыми, так и с полуцелыми спинами. Только члены с полуцелыми спинами чувствуют центр группы. С действием (20.14) вычисления не производились, но это делалось для более простого действия, включающего в себя только два первых члена разложения (20.15) со спином $1/2$ и 1 [25]:

$$S_{\square}(U) = \frac{1}{2} \beta \operatorname{Tr}(U) + \frac{1}{3} \beta_A \operatorname{Tr}_A(U). \quad (20.16)$$

Здесь Tr_A обозначает след, или характер, в присоединенном представлении (со спином единица). Коэффициенты перед константами β и β_A введены ради удобства.

У теории, определенной с помощью (20.16), есть несколько интересных пределов. При нулевом значении β_A она сводится к обычной вильсоновской $SU(2)$ -модели, в которой, по-видимому, нет фазовых переходов. Наоборот, при нулевом значении β мы получаем $SO(3)$ -модель, у которой есть переходы первого рода, как это уже обсуждалось в связи с рис. 20.1 и 20.2. Третий интересный предел связан с бесконечным значением β_A . В этом случае все полевые переменные, определенные на гранях, должны быть элементами центра группы. Но отсюда следует, что переменные на ребрах также с точностью до калибровочных преобразований должны принадлежать центру. Таким образом, $SU(2)$ -модель превращается в Z_2 -калибровочную теорию с константой взаимодействия β . Как уже обсуждалось в гл. 16, в этой модели есть сильный фазовый переход первого рода в самодуальной точке. Следовательно, мы с самого начала знаем, что модель с действием (20.16) должна иметь нетривиальную фазовую структуру с двумя линиями переходов первого рода, входящих в фазовую диаграмму.

Методом Монте-Карло исследовалась зависимость точек фазовых переходов от обеих констант [25]. Полученная фазовая диа-

грамма представлена на рис. 20.3. Заметим, что Z_2 - и $SO(3)$ -переходы слабо зависят от констант, и соответствующие этим переходам линии пересекаются в тройной точке

$$(\beta, \beta_A) = (0.55 \pm 0.03, 2.34 \pm 0.03). \quad (20.17)$$

Из этой точки выходит третья линия переходов первого рода в направлении вильсоновской оси но не пересекает ее; она обрывается в

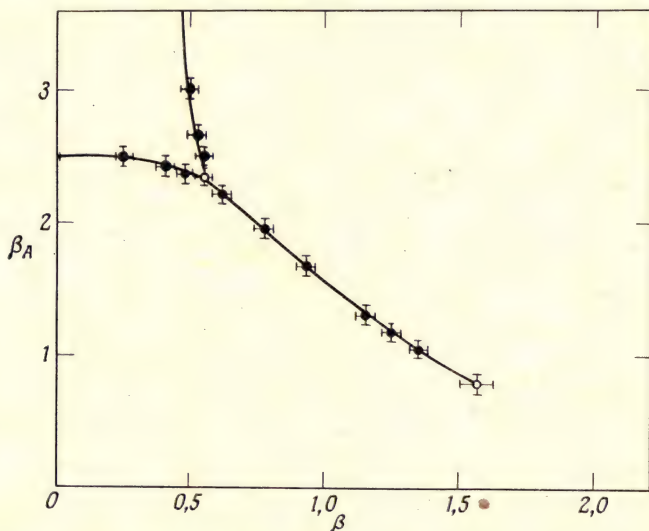


Рис. 20.3. Фазовая диаграмма для решеточной $SU(2)$ -калибровочной теории, включающей фундаментальное и присоединенное представления [25].

критической точке

$$(\beta, \beta_A) = (1.57 \pm 0.05, 0.78 \pm 0.05). \quad (20.18)$$

Эта линия указывает на положение пика теплоемкости для обычной $SU(2)$ -теории [127]. Можно сказать, что этот пик есть остаток от линии переходов, или тень критической конечной точки.

Можно использовать эту модель для проверки единственности непрерывного предела. Связь между голым зарядом и параметрами имеет вид

$$g_0^{-2} = \beta/4 + 2\beta_A/3. \quad (20.19)$$

В непрерывном пределе g_0^2 должна обращаться в нуль; но к этому пределу можно перейти по разным путям в плоскости (β, β_A) . Обыч-

но это делают вдоль вильсоновской оси $\beta_A = 0, \beta \rightarrow \infty$, на которой нет сингулярностей. Отсюда следует известное утверждение о том, что конфайнмент, существующий в пределе сильной связи, должен сохраняться и при переходе в область слабой связи. Но в равной степени законен и другой путь, например $\beta = \beta_A \rightarrow \infty$. В этом случае имеет место фазовый переход первого рода. Но поскольку соответствующий путь можно трансформировать так, чтобы обойти область переходов, эти фазовые переходы не связаны с деконфайнментом, и их можно рассматривать как решеточные артефакты.

Для того чтобы проверить действительно ли физические наблюдаемые не зависят от пути в плоскости (β, β_A) , можно рассмотреть вильсоновские петли в пределе слабой связи. Эти петли сами по себе не являются наблюдаемыми, поскольку в них имеются ультрафиолетовые расходимости [63] (см. также упражнение 4 в гл. 6). Но эти расходимости сокращаются, если взять отношение петель с равными периметрами, имеющих одинаковое число острых углов. Это приводит нас к отношению

$$R(I, J, K, L) = \frac{W(I, J) W(K, L)}{W(I, L) W(J, K)}, \quad (20.20)$$

где $W(I, J)$ — прямоугольная вильсоновская петля размера $I \times J$ в единицах шага решетки. Если мы хотим сравнить точки, в которых имеет место одна и та же физика, то мы должны для каждого значения β подобрать такое значение β_A , чтобы в результате получить одно и то же определенное значение для величины R . На рис. 20.4 точками обозначены те значения параметров, найденные методом Монте-Карло, при которых величина $R(2, 2, 3, 3)$ равна 0,87 и 0,93. Штриховые линии построены с помощью (20.19) при постоянных значениях голого заряда. В этих вычислениях использовалась 120-элементная подгруппа, аппроксимирующая группу. Аппроксимация группы $SU(2)$ ее конечной подгруппой оправдана при тех значениях параметров, при которых производились вычисления, но при больших значениях константы появляется дополнительный фазовый переход к более упорядоченному состоянию. Линия этих дополнительных переходов обозначена на рис. 20.4 буквой A .

Если все точки такой линии, соответствующей какому-либо постоянному значению R , физически неразличимы, то можно выбрать произвольное значение и отношения R . Результаты вычислений подтверждают это, если учесть, что шаг решетки конечен. На рис. 20.5 приведено несколько зависимостей R от β_A , построенных на линии, соответствующей постоянному значению $R(2, 2, 3, 3) = 0,87$. Заметим, что при этом голая константа связи не являет-

ся постоянной. При движении вдоль контура с «постоянной физики» с $R(2, 2, 3, 3) = 0,87$ величина g_0^2 изменяется от значений меньше 1 до почти 4. Такие вариации допустимы и возможно даже ожидаемы, так как голый заряд есть величина ненаблюдаемая и зависящая от схемы обрезания. Зависимость может быть охарактеризована с помощью перенормировочной шкалы $\Lambda_0(\beta_A)$, зависящей от β_A .

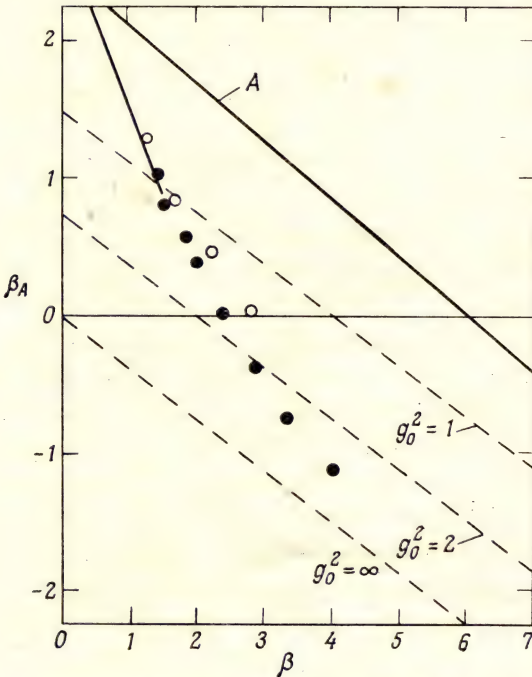


Рис. 20.4. Точки «постоянной физики», полученные для $R(2, 2, 3, 3) = 0,87$ (темные кружки) и $0,93$ (светлые кружки) (A — линия переходов, связанная с дискретностью аппроксимирующей подгруппы) [25].

Зависимость Λ_0 от новой константы связи можно определять по теории возмущений [26, 85]. При достаточной близости к вильсоновскому пределу, скажем при $|\beta_A a| < 0,5$, точность вычислений достаточно высока. Но при приближении к критической конечной точке при положительных β_A наблюдаются большие отклонения от точек на рис. 20.4. Это показывает, что результаты расчетов методом Монте-Карло зависят от каких-то дополнительных физических свойств. Вблизи новой критической точки мы наблюдаем решеточные артефакты. При отрицательных β_A , где голая константа связи

становится большой, согласие с результатами вычислений по теории возмущений опять становится плохим. Расхождение, по-видимому, объясняется тем, что при больших значениях константы связи важную роль играют высшие члены разложения ренормгрупповой функции [90].

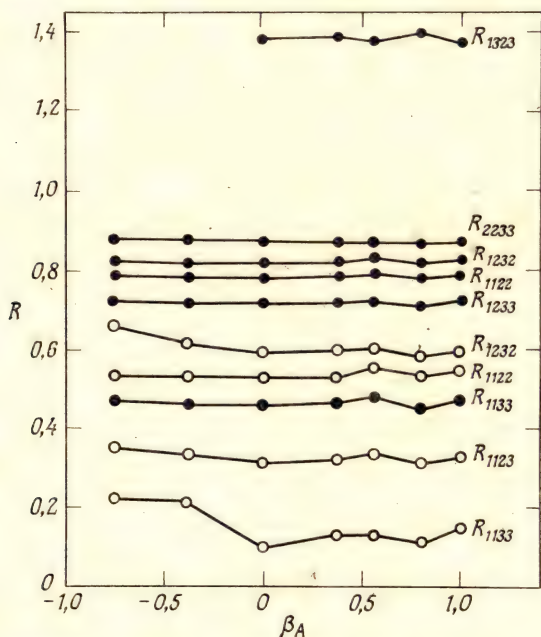


Рис. 20.5. Несколько зависимостей отношения R от β_A при $R(2, 2, 3, 3) = 0,87$ [25].

Этот анализ показывает особую роль вильсоновского действия. Для него скейлинговое поведение проявляется не на очень больших решетках, на которых можно производить вычисления методом Монте-Карло.

При возрастании параметра β_A по сравнению с β экстремум действия при $U = -I$ меняется с максимума на минимум. Это происходит при

$$\beta_A = 3\beta/8. \quad (20.21)$$

Наконец, вдоль оси β_A оба минимума вырождены. Заметим, что критическая конечная точка лежит несколько выше линии (20.21). Бано [23] исследовал аналогичную модель с двумя константами и группой симметрии $SU(3)$. Он обнаружил критическую конечную

точку вблизи того места, где действие, построенное на гранях с помощью групповых переменных, принадлежащих центру группы, имеет новый минимум. В случае группы симметрии $SU(n)$ с $n > 4$ элементы центра группы, близкие к единичному, реализуют минимум действия даже для стандартного вильсоновского действия [6]. Это согласуется с тем фактом, обнаруженным с помощью вычислений методом Монте-Карло, что в теориях с вильсоновским действием с группами симметрии $SU(4)$, $SU(5)$ и $SU(6)$ имеет место фазовый переход первого рода [52, 56, 141]. По-видимому, при отрицательных β_A этот посторонний минимум исчезает. В этом случае линию фазового перехода можно обойти, и, следовательно, эти переходы не связаны с конфайнментом.

В последних главах мы видели, что метод Монте-Карло является весьма мощным инструментом исследований. Этот метод не только позволяет вычислять наблюдаемые, но и открывает путь для изучения вопросов существования и единственности. Такие исследования решений уравнений нетривиальных квантовополевых теорий показывают, что наступает время бурного развития физики элементарных частиц.

Упражнения

1. Покажите, что если произведение переменных σ_\square в (20.12) равно единице для любого трехмерного куба, то переменные σ_\square могут быть представлены в виде произведений четырех Z_2 -переменных, каждая из которых соответствует ребру грани.

2. Проверьте утверждение, что в пределе $\beta_A \rightarrow \infty$ теория, определенная с помощью (20.16), сводится к Z_2 -калибровочной теории.

3. Рассмотрите трехпараметрическую теорию с обобщенным действием $SU(2) - SO(3)$, в которое входит как λ -член из (20.12), так и η -член из (20.13). Обсудите различные двухпараметрические пределы этой модели.

Литература

1. Abbott L.F., Farhi E., Phys. Lett., **101B**, 69 (1981).
2. Abbott L.F., Farhi E., Nucl. Phys., **B189**, 547 (1981).
3. Adler S.L., Phys. Rev., **117**, 2426 (1969).
4. Aharonov Y., Bohm D., Phys. Rev., **115**, 485 (1959).
5. Ashmore J.F., Nuovo Cim. Lett., **4**, 289 (1972).
6. Bachas C., Dashen R., Nucl. Phys., **B210**, 583 (1982).
7. Baker G.A., Jr., Kincaid J., Phys. Rev. Lett., **42**, 1431 (1979).
8. Banks T., Raby S., Susskind L., et al., Phys. Rev., **D15**, 1111 (1977).
9. Banks T., Yankielowicz S., Schwimmer A., Phys. Lett., **96B**, 67 (1980).
10. Bars I., Phys. Rev. Lett., **36**, 1521 (1976).
11. Bars I., Physica Scripta, **23**, 983 (1981).
12. Balian R., Drouffe J.M., Itzykson C., Phys. Rev. **D10**, 3376 (1974).
13. Balian R., Drouffe J.M., Itzykson C., Phys. Rev., **D11** 2098 (1975).
14. Balian R., Drouffe J.M., Itzykson C., Phys. Rev., **D11**, 2104 (1975).
15. Becher P., Joos H., Zs. Phys., **C15**, 343 (1982).
16. Beg M.A.B., Ruegg H., J. Math. Phys., **6**, 677 (1965).
17. Bell J., Jackiw R., Nuovo Cim., **60A**, 47 (1969).
18. Bender C.M., Cooper F., Guralnik G.S., et al., Phys. Rev., **D23**, 2976 (1981).
19. Berg B., Billoire A., Phys. Lett., **113B**, 65 (1982).
20. Berg B., Billoire A., Phys. Lett., **114B**, 324 (1982).
21. Berg B., Billoire A., Rebhi C., Ann. Phys., **142**, 185 (1982).
22. Bhanot G., Phys. Rev., **D24**, 461 (1981).
23. Bhanot G., Phys. Lett., **108B**, 337 (1982).
24. Bhanot G., Creutz M., Phys. Rev., **D21**, 2892 (1980).
25. Bhanot G., Creutz M., Phys. Rev., **D24**, 3212 (1981).
26. Bhanot G., Dashen R., Phys. Lett., **113B**, 299 (1982).
27. Bhanot G., Rebhi C., Nucl. Phys., **B180**, 469 (1981).
28. Blairon J.M., Brout R., Englert F., et al., Nucl. Phys., **B180** [FS2], 439 (1981).
29. Blote H., Swendsen R., Phys. Rev. Lett., **43**, 799 (1979).
30. Bollini C.G., Giambiagi J.J., Nuovo Cim., **12B**, 20 (1972).
31. Brezin E., Le Guillou J.-C., Zinn-Justin J., Phys. Rev., **D15**, 1544 (1977).
32. Brezin E., Le Guillou J.-C., Zinn-Justin J., Phys. Rev., **D15**, 1558 (1977).
33. Brower R.C., Creutz M., Nauenberg M., Nucl. Phys., **B210** [FS6], 133 (1982).
34. Brower R.C., Kessler D.A., Levine H., Nucl. Phys., **B205**, 77 (1982).
35. Brower R., Nauenberg M., Nucl. Phys., **B180**, 221 (1980).
36. Cardy J., J. Phys., **A13**, 1507 (1980).
37. Caswell W.E., Phys. Rev. Lett., **33**, 244 (1974).
38. Chodos A., Healy J.B., Phys. Rev., **D16**, 387 (1977).
39. Chodos A., Jaffe R.L., Johnson K., et al., Phys. Rev., **D12**, 2060 (1975).
40. Coleman S., Comm. Math. Phys., **31**, 259 (1973).
41. Coleman S., Weinberg E., Phys. Rev., **D7**, 1888 (1973).
42. Coleman S., Witten E., Phys. Rev. Lett., **45**, 100 (1980).
43. Collins P.D., Squires E.J., SP Physics, **45**, 1 (1968).
44. Creutz M., Phys. Rev., **D15**, 1128 (1977).

45. Creutz M., Rev. Mod. Phys., **50**, 561 (1978).
46. Creutz M., J. Math. Phys., **19**, 2043 (1978).
47. Creutz M., Phys. Rev. Lett., **43**, 553 (1979).
48. Creutz M., Phys. Rev., **D21**, 1006 (1980).
49. Creutz M., Phys. Rev., **D21**, 2308 (1980).
50. Creutz M., Phys. Rev. Lett., **45**, 313 (1980).
51. Creutz M., Phys. Rev., **D23**, 1815 (1981).
52. Creutz M., Phys. Rev. Lett., **46**, 1441 (1981).
53. Creutz M., Freedman B., Ann. Phys. (N.Y.), **132**, 427 (1981).
54. Creutz M., Jacobs L., Rebbi C., Phys. Rev. Lett., **42**, 1390 (1979).
55. Creutz M., Jacobs L., Rebbi C., Phys. Rev., **D20**, 1915 (1979).
56. Creutz M., Moriarty K.J.M., Phys. Rev., **D25**, 1724 (1982).
57. Creutz M., Moriarty K.J.M., Phys. Rev. **D26**, 2166 (1982).
58. Creutz M., Tudron T.N., Phys. Rev., **D17**, 2619 (1978).
59. Dashen R., Gross D., Phys. Rev. **D23**, 2340 (1981).
60. DeGrand T., Toussaint D., Phys. Rev. **D22**, 2478 (1980).
61. Dirac P.A.M., Phys., Zs. Sowjetunion, **3**, 64 (1933).
62. Dirac P.A.M., Rev. Mod. Phys., **17**, 195 (1945).
63. Dotsenko V.S., Vergeles S.N. Nucl. Phys., **B169**, 527 (1980).
64. Drell S.D., Weinstein M., Yankielowicz S., Phys. Rev., **D14**, 1627 (1976).
65. Drouffe J.M., Phys. Rev., **D18**, 1174 (1978).
66. Drouffe J.M., Phys. Lett., **105B**, 46 (1981).
67. Dyson F.J., Phys. Rev., **85**, 631 (1952).
68. Edgar R.C., Nucl. Phys. **B200** [FS4], 345 (1982).
69. Eichten E., Gottfried K., Kinoshita T., et al., Phys. Rev., **D21**, 203 (1980).
70. Elitzur S., Phys. Rev., **D12**, 3978 (1975).
71. Elitzur S., Pearson R.B., Shigemitsu J., Phys. Rev., **D19**, 3698 (1979).
72. Engels J., Karsch F., Satz H., Montvay I., Phys. Lett., **101B**, 89 (1981).
73. Fadeev L., Popov V., Phys. Lett., **25B**, 29 (1967).
74. Feynman R.P., Rev. Mod. Phys., **20**, 367 (1948).
75. Fisher M.E., Gaunt D.S., Phys. Rev., **133**, A224 (1964).
76. Flyvbjerg H., Lautrup B., Zuber J.B., Phys. Lett., **110B**, 279 (1982).
77. Fradkin E., Shenker S., Phys. Rev., **D19**, 3682 (1979).
78. Freedman B., Smolensky P., Weingarten D., Phys. Lett., **113B**, 481 (1982).
79. Frohlich J., Morchio G., Strocchi F., Nucl. Phys., **B190** [FS3], 553 (1981).
80. Fucito F., Marinari E., Parisi G., Rebbi C., Nucl. Phys., **B180**, [FS2], 369 (1981).
81. Gell-Mann M., Low F., Phys. Rev., **95**, 1300 (1954).
82. Gell-Mann M., Ne'eman Y., The Eightfold Way, Benjamin, N.Y., 1964.
83. Goddard P., Goldstone J., Rebbi C., Thorn C.B., Nucl. Phys., **B56**, 109 (1973).
84. Goldstone J., Nuovo Cim., **19**, 15 (1961).
85. Gonzales-Arroyo A., Korthals-Altes C.P., Nucl. Phys., **B205**, 46 (1982).
86. Greensite J., Lautrup B., Phys. Rev. Lett., **47**, 9 (1981).
87. Gross D., Wilczek F., Phys. Rev. Lett., **30**, 1343 (1973).
88. Gross D., Wilczek F., Phys. Rev., **D8**, 3633 (1973).
89. Grosse H., Kuhnelt H., Nucl. Phys., **B205**, 273 (1981).
90. Grossman B., Samuel S., Phys. Lett., **120B**, 383 (1982).
91. Guth A.H., Phys. Rev., **D21**, 2291 (1980).
92. Hagedorn R., Nucl. Phys., **B24**, 93 (1970).
93. Halliday I.G., Schwimmer A., Phys. Lett., **101B**, 327 (1981).
94. Halliday I.G., Schwimmer A., Phys. Lett., **102B**, 337 (1981).
95. Hamber H., Parisi G., Phys. Rev. Lett., **47**, 1792 (1981).

96. Hasenfratz A., Hasenfratz P., Phys. Lett., **93B**, 165 (1980).
97. Hasenfratz A., Hasenfratz P., Nucl. Phys., **B193**, 210 (1981).
98. Higgs P., Phys. Rev. Lett., **13**, 508 (1964).
99. Horn D., Weinstein M., Yankielowicz S., Phys. Rev. **D19**, 3715 (1979).
100. Huebner R.P., Clem J.R., Rev. Mod. Phys., **46**, 409 (1974).
101. Ishikawa K., Schierholz G., Teper M., Phys. Lett., **110B**, 399 (1982).
102. Jones D.R.T., Nucl. Phys., **B75**, 531 (1974).
103. Kadanoff L.P., Ann. Phys., **100**, 359 (1976).
104. Kadanoff L.P., Rev. Mod. Phys., **49**, 267 (1977).
105. Kajantie K., Montonen C., Pietarinen E., Zs., Phys., **C9**, 253 (1981).
106. Karsten L., Smit J., Nucl. Phys., **B183**, 103 (1981).
107. Kawai H., Nakayama R., Seo K., Nucl. Phys., **B189**, 40 (1981).
108. Kerler W., Phys. Rev., **D23**, 2384 (1981).
109. Kerler W., Phys. Rev., **D24**, 1595 (1981).
110. Kluberg-Stern H. et al., Nucl. Phys., **B190** [FS3], 504 (1981).
111. Knuth D.E., The Art of Computer Programming, vol. II. Addison-Wesley, 1969.
112. Kogut J.B., Rev. Mod. Phys., **51**, 659 (1979).
113. Kogut J.B. et al., Phys. Rev., **D22**, 2447 (1980).
114. Kogut J.B., Stone M., Wyld H., et al., Phys. Rev. Lett., **48**, 1140 (1982).
115. Kogut J., Susskind L., Phys. Rev., **D9**, 3501 (1974).
116. Kogut J., Susskind L., Phys. Rev., **D11**, 395 (1975).
117. Kogut J., Wilson K., Phys. Reports, **12**, 75 (1974).
118. Korthals-Altes C.P., Nucl. Phys., **B142**, 315 (1978).
119. Kosterlitz J.M., Thouless D.J., J. Phys., **C6**, 1181 (1973).
120. Kramers H.A., Wannier G.H., Phys. Rev., **60**, 252 (1941).
121. Kuti J., Phys. Rev. Lett., **49**, 183 (1982).
122. Kuti J., Polonyi J., Szlachanyi K., Phys. Lett., **98B**, 199 (1981).
123. Lang C.B. et al., Phys. Lett., **101B**, 173 (1981).
124. Lang C.B. et al., Phys. Rev., **D26**, 2028 (1982).
125. LaRue G.S., Phillips J.D., Fairbank W.M., Phys. Rev. Lett., **46**, 967 (1981).
126. Lautrup B., Nauenberg M., Phys. Lett., **95B**, 63 (1980).
127. Lautrup B., Nauenberg M., Phys. Rev. Lett., **45**, 1755 (1980).
128. Лунанов Л.Н. — Письма ЖЭТФ, 1977, т. 25, с. 116.
129. Mack G., Petkova V.B., Ann. Phys., **123**, 442 (1979).
130. Mandelstam S., Ann. Phys., **19**, 1 (1962).
131. Mantou N.S. Phys. Lett., **96B**, 328 (1980).
132. Marinari E., Parisi G., Rebbi C., Phys. Rev. Lett., **47**, 1795 (1981).
133. Matthews P.T., Salam A., Nuovo Cim., **12**, 563 (1954).
134. McLerran L., Svetitsky B., Phys. Lett., **98B**, 195 (1981).
135. Meissner W.H., Ochsenfeld R., Naturwiss., **21**, 787 (1933).
136. Menotti P., Onofri E., Nucl. Phys., **B190**, 288 (1981).
137. Mermin N.D., Wagner H., Phys. Rev. Lett., **22**, 1133 (1966).
138. Metropolis N. et al., J. Chem. Phys., **21**, 1087 (1953).
139. Муздал А.А. — ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 810.
140. Муздал А.А. — ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 1457.
141. Moriarty K.J., Phys. Lett., **106B**, 130 (1981).
142. Moriarty K.J.M., Pietarinen E., Phys. Lett., **112B**, 233 (1982).
143. Munster G., Nucl. Phys., **B190**, [FS3], 439 (1980); Errata: **B200**, 536; **B205**, 648.
144. Munster G., Weisz P., Phys. Lett., **96B**, 119 (1980).
145. Nambu Y., Jona-Lasinio G., Phys. Rev., **124**, 246 (1961).
146. Nielsen H.B., Ninomiya M., Nucl. Phys., **B185**, 20 (1981).
147. Nielsen H.B., Ninomiya M., Nucl. Phys., **B193**, 173 (1981).

148. Osterwalder K., Seiler E., Ann. Phys., **110**, 440 (1978).
149. Patrasciou A., Seiler E., Stamatescu I.O., Phys. Lett., **107B**, 364 (1981).
150. Pauli W., Villars F., Rev. Mod. Phys., **21**, 434 (1949).
151. Peierls R.E., Ann. Inst. Henri Poincaré, **5**, 177 (1935).
152. Perkins D.H., Rep. Prog. Phys., **40**, 409 (1977).
153. Petermann, Stueckelberg, Helv. Phys. Acta, **26**, 499 (1953).
154. Politzer H.D., Phys. Rev. Lett., **30**, 1346 (1973).
155. Polyakov A.M., Phys. Lett., **59B**, 79 (1975).
156. Polyakov A.M., Phys. Lett., **72B**, 477 (1978).
157. Potts R.B., Proc. Cambridge Phil. Soc., **48**, 106 (1952).
158. Rabin J., Nucl. Phys., **3201**, 315 (1982).
159. Savit R., Rev. Mod. Phys., **52**, 453 (1980).
160. Scalapino D.J., Sugar R., Phys. Rev. Lett., **46**, 519 (1981).
161. Shigemitsu J., Kogut J.B., Nucl. Phys., **B190**, [FS3], 365 (1981).
162. Susskind L., Phys. Rev., **D20**, 2610 (1979).
163. Svetitsky B., Drell S.D., Quinn H.R., Weinstein M., Phys. Rev., **D22**, 490 (1980).
164. Svetitsky B., Yaffe L., Phys. Rev., **D26**, 963 (1982).
165. 't'Hooft G., Nucl. Phys., **B72**, 461 (1974).
166. 't'Hooft G., Cargese Summer Institute Lectures (1979), Plenum, New York, 1980.
167. 't'Hooft G., Veltman M., Nucl. Phys., **B44**, 189 (1972).
168. Tomboulis E., Phys. Rev., **D23**, 2371 (1981).
169. Ukawa A., Windey P., Guth A.H., Phys. Rev., **D21**, 1013 (1980).
170. Villain J., J. Phys. (Paris), **36**, 581 (1975).
171. Wegner F.J., J. Math. Phys., **12**, 2259 (1971).
172. Weinberg S., Phys. Rev., **138**, B988 (1965).
173. Weingarten D., Phys. Lett., **90B**, 280 (1980).
174. Weingarten D., Phys. Lett., **109B**, 57 (1982).
175. Weingarten D., Petcher D., Phys. Lett., **99B**, 333 (1981).
176. Weisz P., Phys. Lett., **100B**, 331 (1981).
177. Wilson L., Phys. Rev., **B4**, 3174 (1971).
178. Wilson K., Phys. Rev., **B4**, 3184 (1971).
179. Wilson K., Phys. Rev., **D10**, 2445 (1974).
180. Wilson K., Phys. Reports., **23**, 331 (1975).
181. Wilson K., In: New Phenomena in Subnuclear Physics, Plenum, N.Y., 1977.
182. Yang C.-P., In: Proc. of Symposia in Applied Mathematics, Vol. XV, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1963, p. 351.
183. Yang C.N., Phys. Rev. Lett., **33**, 445 (1975).
184. Yang C.N., Mills R., Phys. Rev., **96**, 191 (1954).
185. Yoneya T., Nucl. Phys., **B144**, 195 (1978).
- 186*. Celik T., Engels J., Satz H., Phys. Lett., **125B**, 411 (1983).
- 187*. Svetitsky B., Fucito F., Phys. Lett., **131B**, 165 (1983).
- 188*. Kogut J. et al., Phys. Rev. Lett., **51**, 869 (1983).
- 189*. Вильсон К. Дж. Параллельные вычисления. — М.: Наука, 1986, с. 258.
- 190*. Рамон П. Теория поля. М.: Мир, 1984.
- 191*. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1978.
- 192*. Хуанг К. Кварки, лептоны и калибровочные поля. — М.: Мир, 1985.
- 193*. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. — ДАН СССР, 1955, **103**, 203.
- 194*. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. — ДАН СССР, 1955, **103**, 391.
- 195*. Овсянников Л. В. — ДАН СССР, 1956, **109**, 1112.
- 196*. Тарасов О. В. и др. — Phys. Lett., **B93**, 429 (1980).

Оглавление

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	8
Глава 1. Кварки и глюоны	9
Глава 2. Решетки	13
Глава 3. Функциональные интегралы и статистическая механика	16
Глава 4. Скалярные поля	23
Глава 5. Фермионы	30
Глава 6. Калибровочные поля	41
Глава 7. Калибровочная теория на решетке	48
Глава 8. Групповое интегрирование	53
Глава 9. Калибровочная инвариантность и параметры порядка	66
Глава 10. Сильная связь	77
Глава 11. Слабая связь	94
Глава 12. Перенормировка и непрерывный предел	98
Глава 13. Асимптотическая свобода и размерная трансмутация	104
Глава 14. Теория среднего поля	112
Глава 15. Гамильтонов подход	119
Глава 16. Дискретные группы и дуальность	127
Глава 17. Рекурсионные соотношения Мигдала—Каданова ...	137
Глава 18. Метод Монте-Карло I	148
Глава 19. Метод Монте-Карло II	162
Глава 20. За пределами вильсоновского действия	173
Литература	186

Научное издание

Майкл Кройц

КВАРКИ, ГЛЮОНЫ И РЕШЕТКИ

Научн. редактор Телеснин Н. Л.

Мл. научн. редакторы Сорокина Г. Г., Зацепина Р. Х., Цлаф В. Н.

Художник Балобок С. Н.

Художественный редактор Радченко К. В.

Технический редактор Лыткина А. В.

Корректор Валуева Е. А.

ИБ № 5759

Подписано к печати 22.12.86. Формат 60×90¹/₁₆.

Бумага офсетная. Гарнитура таймс. Печать офсетная.

Объем 6,00 бум. л. Усл. печ. л. 12,00. Усл. кр.-отт. 12,26.

Уч.-изд. л. 10,15. Изд. № 2/4529. Тираж 6 000 экз.

Зак.10. Цена 1 р. 50 коп.

Набрано в издательстве «Мир»

на фотонаборном комплексе «Компьюграфик»

129820, ГСП, Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Тульская типография Союзполиграфпрома

при Государственном комитете СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.

300600, Тула, проспект им. В. И. Ленина, 109

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, 1-й Рижский пер., 2, изд-во «Мир».



THE HISTORY OF THE
UNITED STATES OF AMERICA